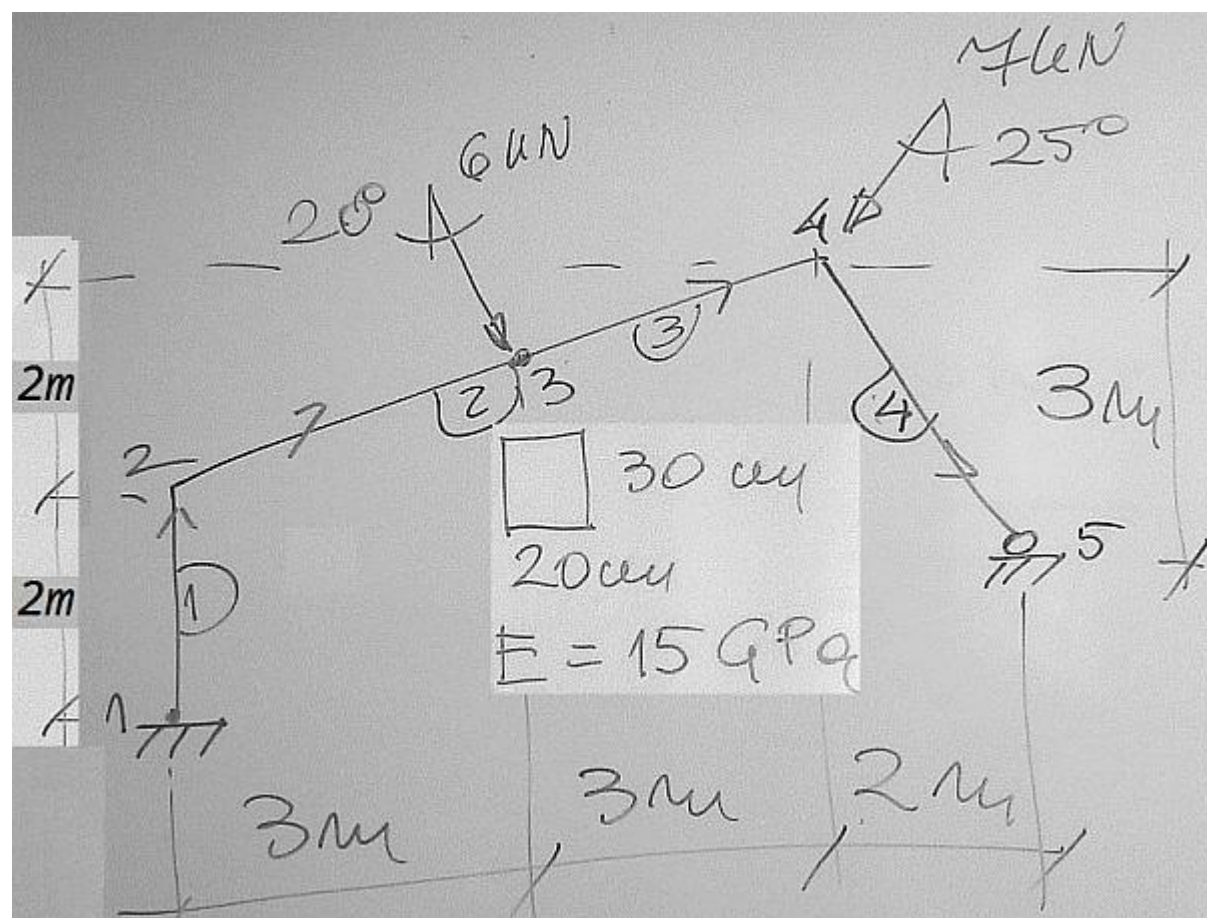


## Statyka ramy płaskiej obciążonej siłami



$ORIGIN := 1$  - ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy

$E := 1.5 \cdot 10^7$  [kPa] - moduł Younga

$\alpha t := 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}$  - współczynnik rozszerzalności cieplnej

$b1 := 0.2$   $h1 := 0.3$  [m] - wymiary przekroju

$A1 := b1 \cdot h1 = 0.060$  [m<sup>2</sup>] - Pole powierzchni przekroju elementów

$J1 := \frac{b1 \cdot h1^3}{12} = 4.500 \times 10^{-4}$  [m<sup>4</sup>] - Moment bezwładności przekroju

Parametry pomocnicze:

$L_{ss} := 3$  - Liczba stopni swobody węzła

$L_e := 4$  - Liczba elementów

$L_w := 5$  - Liczba węzłów

$L_r := L_{ss} \cdot L_w$  - Liczba równań

$KO_{Lr, Lr} := 0$  Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami

$PO_{Lr} := 0$  Deklaracja globalnego wektora sił węzłowych i wypełnienie go zerami

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności

$$LBM(A, B, w, k) := \begin{cases} \text{for } i \in 1.. \text{rows}(B) \\ \quad \text{for } j \in 1.. \text{cols}(B) \\ \quad \quad A_{w+i-1, k+j-1} \leftarrow B_{i, j} \end{cases} A$$

Współrzędne węzłów ramy

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

Przekroje elementów

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} m \quad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} m$$

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

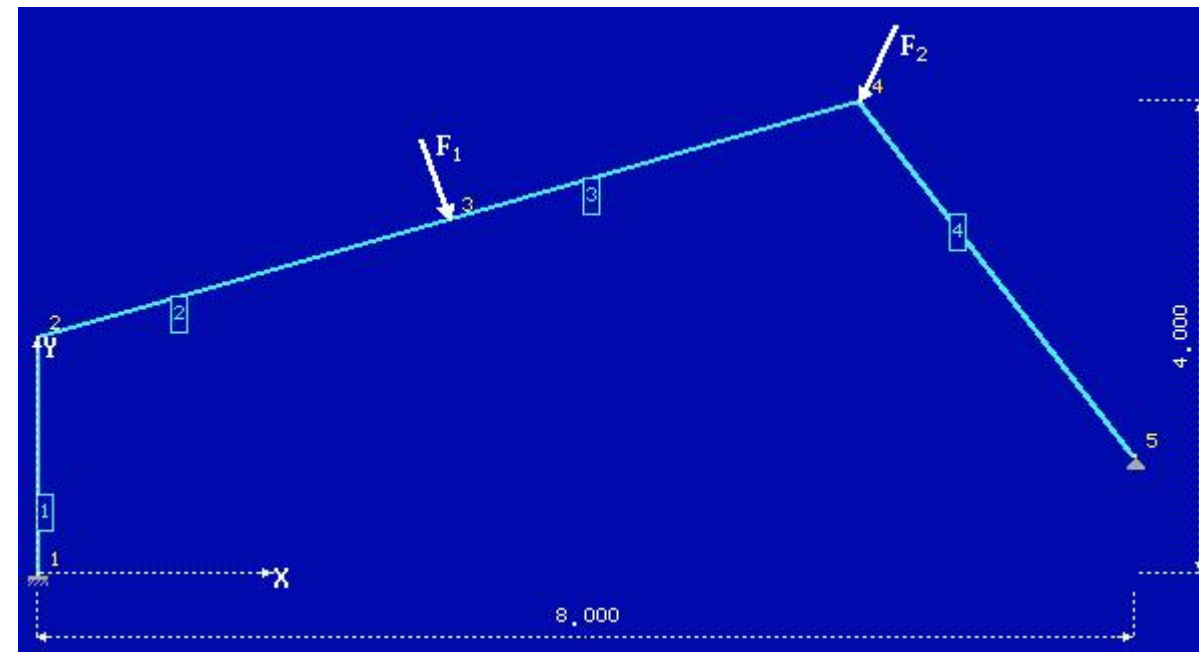
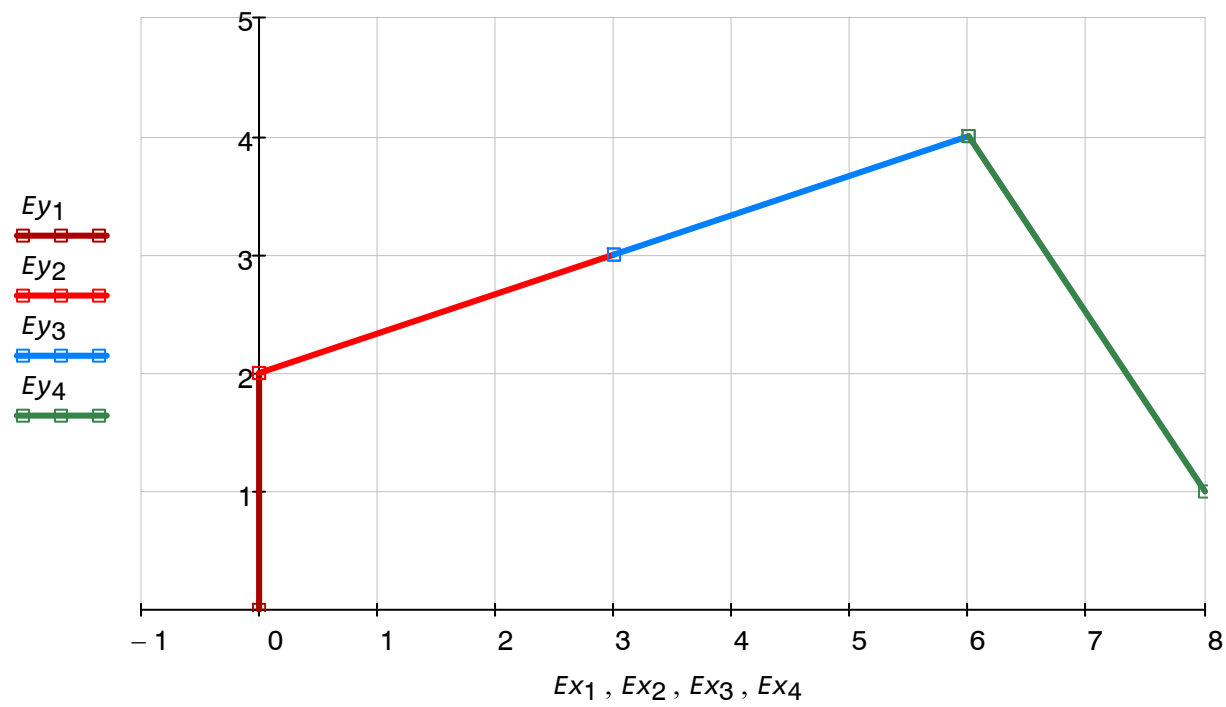
$$A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \end{pmatrix} \quad J := \begin{pmatrix} J1 \\ J1 \\ J1 \\ J1 \end{pmatrix}$$

Pętla po wszystkich elementach ramy

$$e := 1 .. Le$$

Rysunek elementów ramy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \quad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \quad Ex, Ey - \text{współrzędne węzłów elementów}$$



Rysunek wykonany przez program PRET\_r2

Macierze sztywności elementów ramy

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$Lx_e := X_{(wk_e)} - X_{(wp_e)} \quad Ly_e := Y_{(wk_e)} - Y_{(wp_e)}$$

$$L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$$

Macierze obrotu

$$R_e := \frac{1}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} Lx_e & -Ly_e & 0 \\ Ly_e & Lx_e & 0 \\ 0 & 0 & (L_e) \end{bmatrix}$$

Bloki macierzy sztywności elementów

$$D_e := \frac{E}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} A_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot J_e}{(L_e)^2} & \frac{6 \cdot J_e}{L_e} \\ 0 & \frac{6 \cdot J_e}{L_e} & 4 \cdot J_e \end{bmatrix} \quad C_e := \frac{E}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} -A_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 \cdot J_e}{(L_e)^2} & \frac{6 \cdot J_e}{L_e} \\ 0 & \frac{-6 \cdot J_e}{L_e} & 2 \cdot J_e \end{bmatrix} \quad B_e := \frac{E}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} A_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot J_e}{(L_e)^2} & \frac{-6 \cdot J_e}{L_e} \\ 0 & \frac{-6 \cdot J_e}{L_e} & 4 \cdot J_e \end{bmatrix}$$

$$Dg_e := R_e \cdot D_e \cdot R_e^T \quad Bg_e := R_e \cdot B_e \cdot R_e^T \quad Cg_e := R_e \cdot C_e \cdot R_e^T \quad \text{Bloki macierzy w układzie globalnym}$$

Bloki macierzy elementu Nr 2 w układzie globalnym

$$Dg_2 = \begin{pmatrix} 256400.635 & 84613.063 & -1280.722 \\ 84613.063 & 30765.799 & 3842.167 \\ -1280.722 & 3842.167 & 8538.150 \end{pmatrix} \quad Cg_2 = \begin{pmatrix} -256400.635 & -84613.063 & -1280.722 \\ -84613.063 & -30765.799 & 3842.167 \\ 1280.722 & -3842.167 & 4269.075 \end{pmatrix}$$

$$Cg_2^T = \begin{pmatrix} -256400.635 & -84613.063 & 1280.722 \\ -84613.063 & -30765.799 & -3842.167 \\ -1280.722 & 3842.167 & 4269.075 \end{pmatrix} \quad Bg_2 = \begin{pmatrix} 256400.635 & 84613.063 & 1280.722 \\ 84613.063 & 30765.799 & -3842.167 \\ 1280.722 & -3842.167 & 8538.150 \end{pmatrix}$$

Macierz elementu Nr 2 obliczona przez Algor Ssap0

$$\begin{matrix} 2.5640E+05 & 8.4613E+04 & -1.2807E+03 & -2.5640E+05 & -8.4613E+04 & -1.2807E+03 \\ 8.4613E+04 & 3.0766E+04 & 3.8422E+03 & -8.4613E+04 & -3.0766E+04 & 3.8422E+03 \\ -1.2807E+03 & 3.8422E+03 & 8.5381E+03 & 1.2807E+03 & -3.8422E+03 & 4.2691E+03 \\ -2.5640E+05 & -8.4613E+04 & 1.2807E+03 & 2.5640E+05 & 8.4613E+04 & 1.2807E+03 \\ -8.4613E+04 & -3.0766E+04 & -3.8422E+03 & 8.4613E+04 & 3.0766E+04 & -3.8422E+03 \\ -1.2807E+03 & 3.8422E+03 & 4.2691E+03 & 1.2807E+03 & -3.8422E+03 & 8.5381E+03 \end{matrix}$$

*Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej*

$n_e := LSS \cdot Wp_e - 2$        $k_e := LSS \cdot Wk_e - 2$       <--- numery stopni swobody węzłów początkowych ( $n_e$ ) i końcowych ( $k_e$ )

$K_{\omega\omega} := \sum_e \left( LBM(Ko, Dg_e, n_e, n_e) + LBM(Ko, Bg_e, k_e, k_e) + LBM(Ko, Cg_e, n_e, k_e) + LBM(Ko, Cg_e^T, k_e, n_e) \right)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	10125.000	0.000	-10125.000	-10125.000	0.000	-10125.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	450000.000	0.000	0.000	-450000.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	-10125.000	0.000	13500.000	10125.000	0.000	6750.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	-10125.000	0.000	10125.000	266525.635	84613.063	8844.278	-256400.635	-84613.063	-1280.722	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.000	-450000.000	0.000	84613.063	480765.799	3842.167	-84613.063	-30765.799	3842.167	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	-10125.000	0.000	6750.000	8844.278	3842.167	22038.150	1280.722	-3842.167	4269.075	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	0.000	-256400.635	-84613.063	1280.722	512801.270	169226.127	0.000	-256400.635	-84613.063	-1280.722	0.000	0.000	0.000
8	0.000	0.000	0.000	-84613.063	-30765.799	-3842.167	169226.127	61531.599	0.000	-84613.063	-30765.799	3842.167	0.000	0.000	0.000
9	0.000	0.000	0.000	-1280.722	3842.167	4269.075	0.000	0.000	17076.299	1280.722	-3842.167	4269.075	0.000	0.000	0.000
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-256400.635	-84613.063	1280.722	334401.658	-29796.314	3872.879	-78001.023	114409.377	2592.157
11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-84613.063	-30765.799	-3842.167	-29796.314	204107.970	-2114.063	114409.377	-173342.170	1728.104
12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1280.722	3842.167	4269.075	3872.879	-2114.063	16026.602	-2592.157	-1728.104	3744.226
13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-78001.023	114409.377	-2592.157	78001.023	-114409.377	-2592.157
14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	114409.377	-173342.170	-1728.104	-114409.377	173342.170	-1728.104
15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2592.157	1728.104	3744.226	-2592.157	-1728.104	7488.453

*Globalna macierz sztywności **K** bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.  $|K|=0$*

$|K| = 3.259 \times 10^{19}$

	1
1	0.000000
2	0.000000
3	0.000000
4	0.000000
5	0.000000
6	0.000000
7	2.052121
8	-5.638156
9	0.000000
10	-2.958328
11	-6.344155
12	0.000000
13	0.000000
14	0.000000
15	0.000000

*Globalny wektor sił węzłowych*       $p := p_0$

$Fx3 := 6 \cdot \sin(20deg)$        $Fy3 := -6 \cdot \cos(20deg)$

$Fx4 := -7 \cdot \sin(25deg)$        $Fy4 := -7 \cdot \cos(25deg)$

*Wstawianie sił do wektora "prawej strony"*

$p_7 := Fx3$        $p_8 := Fy3$

$p_{10} := Fx4$        $p_{11} := Fy4$

*Kopiowanie Macierzy  $\mathbf{K}$  i wektora  $\mathbf{p}$  przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$k\theta := K$        $p\theta := p$

*Uwzględnienie warunków brzegowych*

$s_w := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$  - globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach

$Lwb := rows(s)$  - liczba warunków brzegowych

$i := 1 .. Lr$        $j := 1 .. Lwb$

$k\theta_{s_j, i} := 0$       zerowanie wierszy

$k\theta_{s_j, s_j} := 1$       wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności

$p\theta_{s_j} := 0$       zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	-10125.000	0.000	10125.000	266525.635	84613.063	8844.278	-256400.635	-84613.063	-1280.722	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.000	-450000.000	0.000	84613.063	480765.799	3842.167	-84613.063	-30765.799	3842.167	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	-10125.000	0.000	6750.000	8844.278	3842.167	22038.150	1280.722	-3842.167	4269.075	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	0.000	-256400.635	-84613.063	1280.722	512801.270	169226.127	0.000	-256400.635	-84613.063	-1280.722	0.000	0.000	0.000
8	0.000	0.000	0.000	-84613.063	-30765.799	-3842.167	169226.127	61531.599	0.000	-84613.063	-30765.799	3842.167	0.000	0.000	0.000
9	0.000	0.000	0.000	-1280.722	3842.167	4269.075	0.000	0.000	17076.299	1280.722	-3842.167	4269.075	0.000	0.000	0.000
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-256400.635	-84613.063	1280.722	334401.658	-29796.314	3872.879	-78001.023	114409.377	2592.157
11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-84613.063	-30765.799	-3842.167	-29796.314	204107.970	-2114.063	114409.377	-173342.170	1728.104
12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1280.722	3842.167	4269.075	3872.879	-2114.063	16026.602	-2592.157	-1728.104	3744.226
13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2592.157	1728.104	3744.226	-2592.157	-1728.104	7488.453

$|k\theta| = 5.2504655 \times 10^{45}$  - wyznacznik macierzy  $\mathbf{K}_0$  jest zawsze większy od zera,  $|\mathbf{K}_0| > 0$

Rozwiązanie układu równań:  $u := \text{Lsolve}(K\theta, p\theta)$   $u$  - wektor przemieszczeń węzłowych

$r := K \cdot u - p$  - wektor reakcji podpór

	1
1	5.803
2	5.731
3	-5.607
4	-0.000
5	0.000
6	-0.000
7	-0.000
8	-0.000
9	0.000
10	0.000
11	0.000
12	-0.000
13	-4.897
14	6.251
15	0.000

$r =$  kN

	1
1	-0.000000
2	0.000000
3	-0.000000
4	-0.514877
5	-0.012735
6	-0.058282
7	0.035176
8	-1.744201
9	-0.201327
10	-0.459185
11	-0.344247
12	0.548523
13	0.000000
14	0.000000
15	-0.035871

$1000u =$  mm,  $f_i \cdot 1000$  rd

Wyniki obliczone za pomocą programu PRET\_r2 i Algor Ssap0 11.10

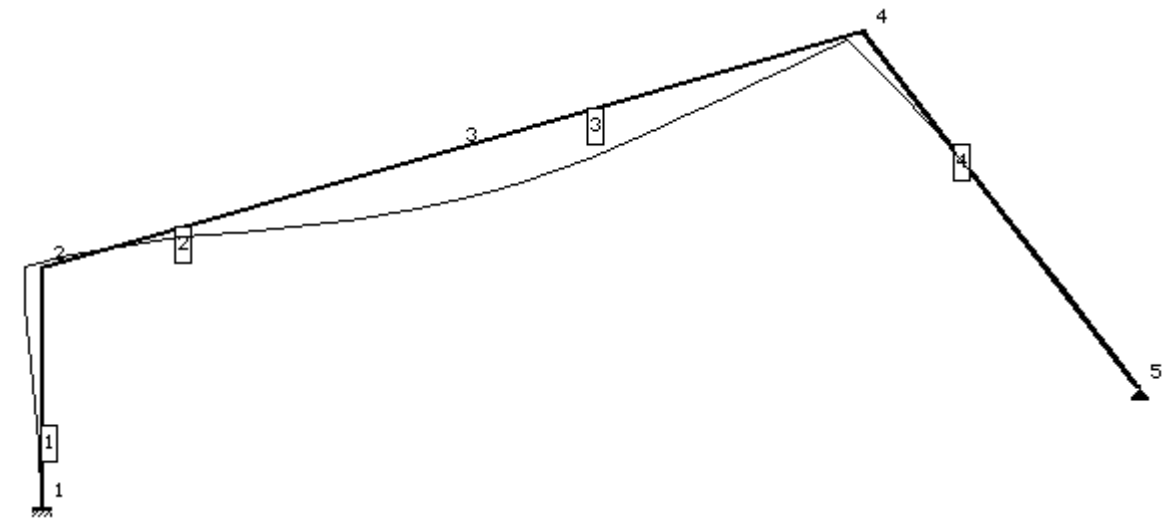
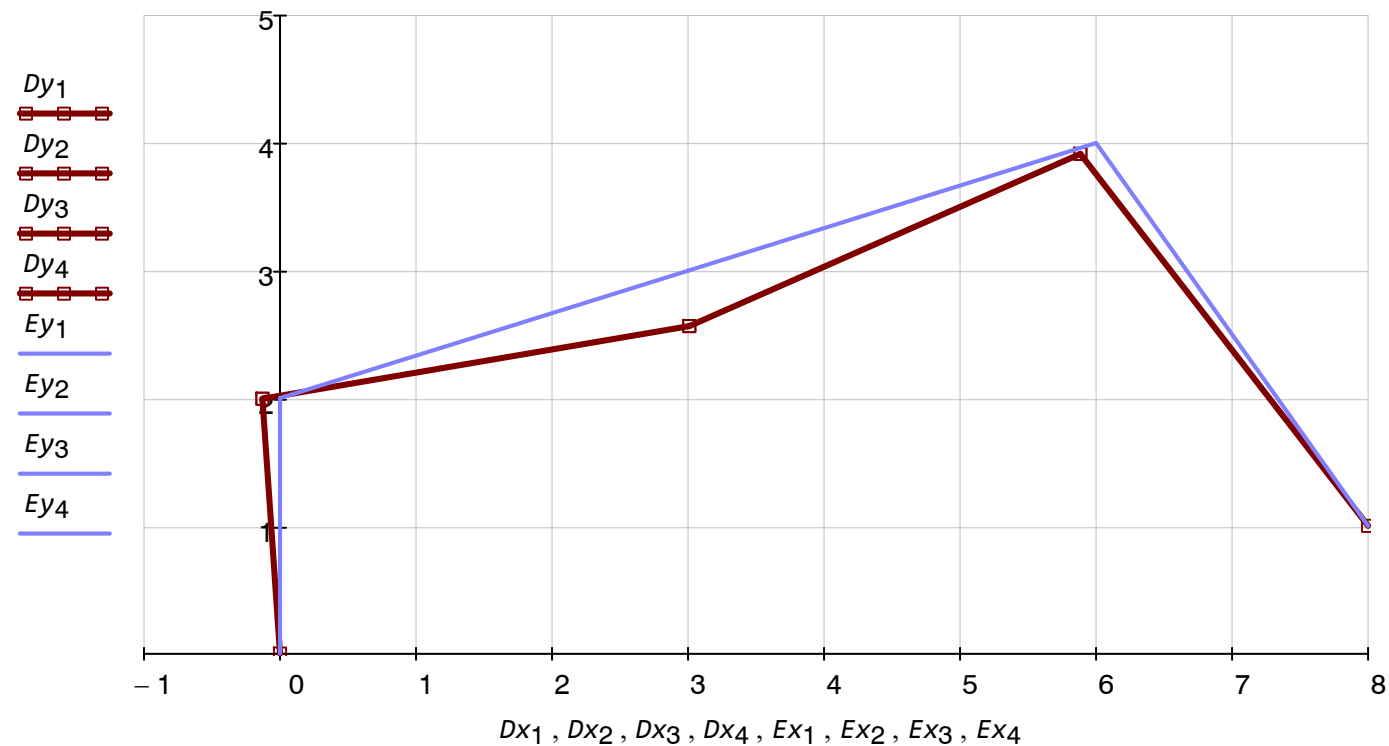
Wartości przemieszczeń i reakcji

Nr	u [mm]	v [mm]	fi [rad]	Rx[kN]	Ry[kN]	Mz[kNm]
1	-0.0	-0.0	0.0	5.803	5.731	-5.607
2	-0.5148770	-0.01273515	-5.828234E-5	0.000	0.000	0.000
3	0.0351757	-1.744201	-2.013272E-4	0.000	-0.000	0.000
4	-0.4591850	-0.34424680	5.485230E-4	0.000	0.000	0.000
5	0.0	-0.0	-3.587130E-5	-4.897	6.251	0.000

Rysunek przemieszczeń pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

$skala := 250$

$$Dx_e := Ex_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u(n_e) \\ u(k_e) \end{bmatrix} \quad Dy_e := Ey_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u(n_{e+1}) \\ u(k_{e+1}) \end{bmatrix}$$



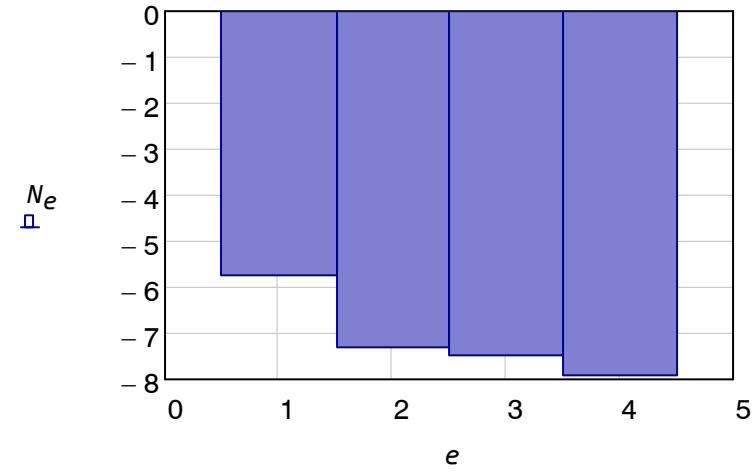
Rysunek przemieszczeń ramy otrzymany za pomocą programu PRET\_r2

*Obliczenie sił wewnętrznych*

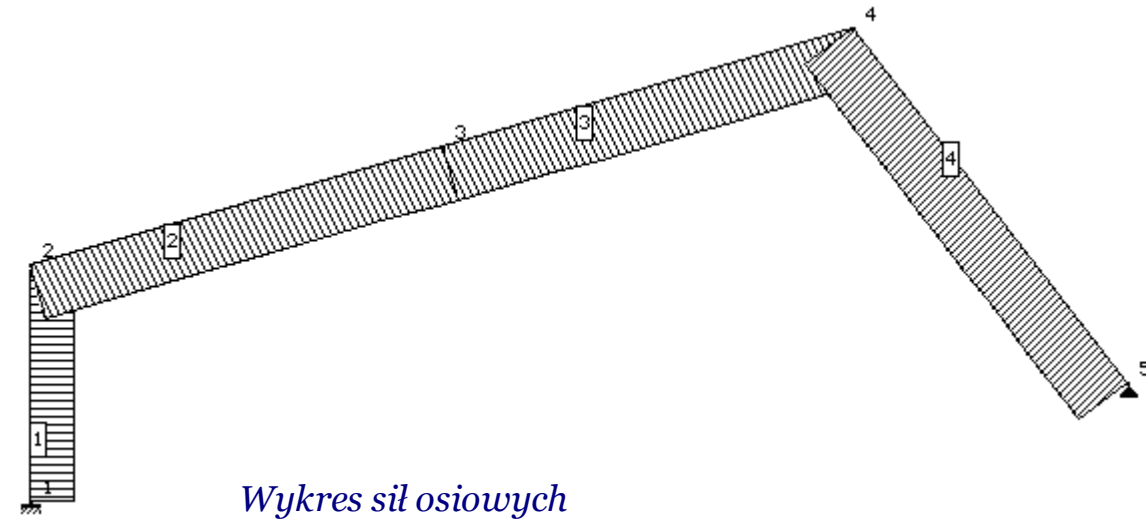
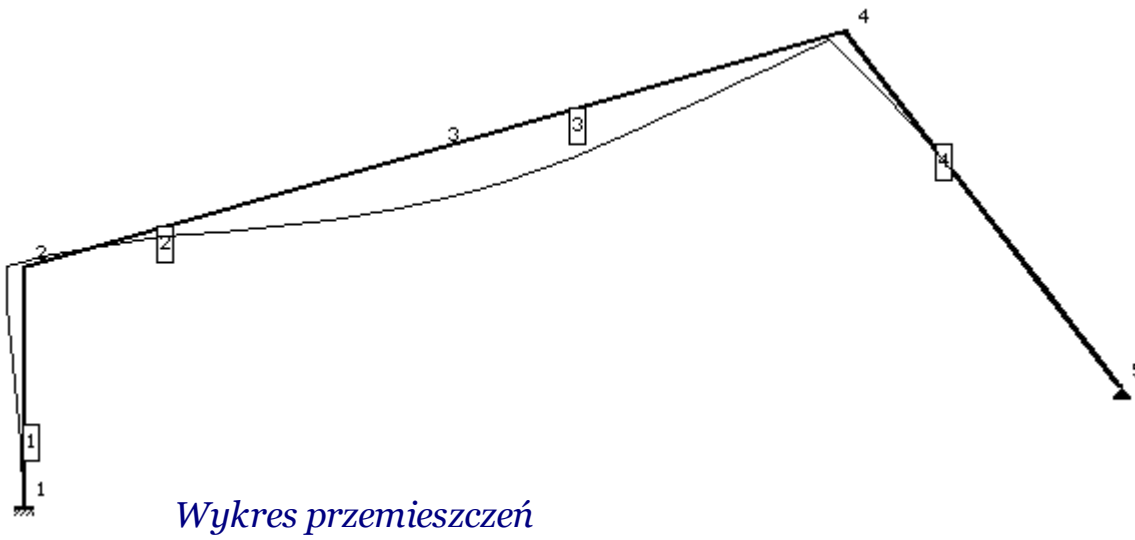
$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^2} \cdot \left[ (u_{k_e} - u_{n_e}) \cdot L_{x_e} + (u_{k_{e+1}} - u_{n_{e+1}}) \cdot L_{y_e} \right] \quad \text{- siły osiowe}$$

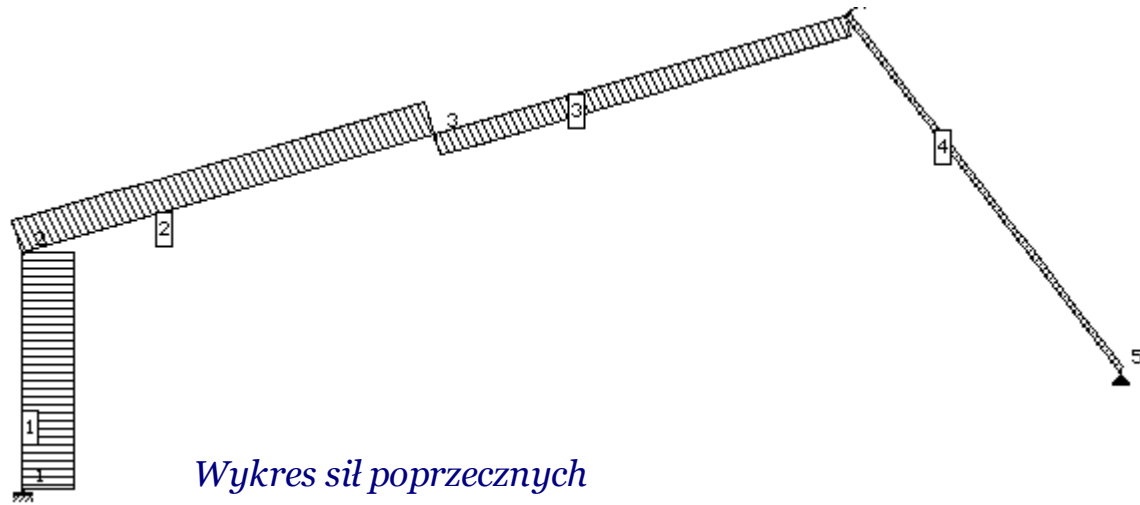
$N =$

	1
1	-5.731
2	-7.318
3	-7.482
4	-7.918

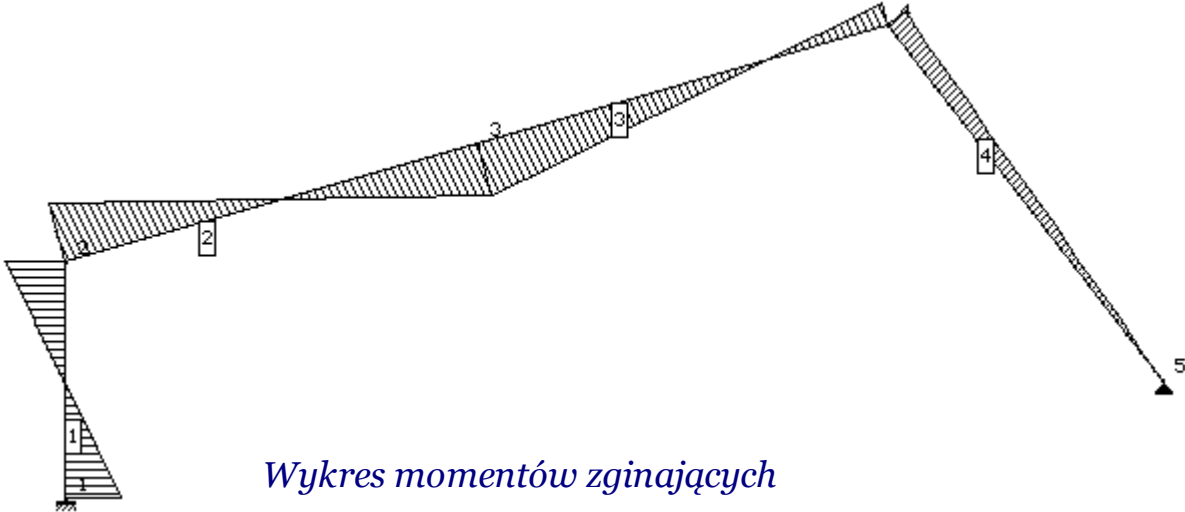


*Wyniki obliczone za pomocą programu PRET\_r2*





*Wykres sił poprzecznych*



*Wykres momentów zginających*