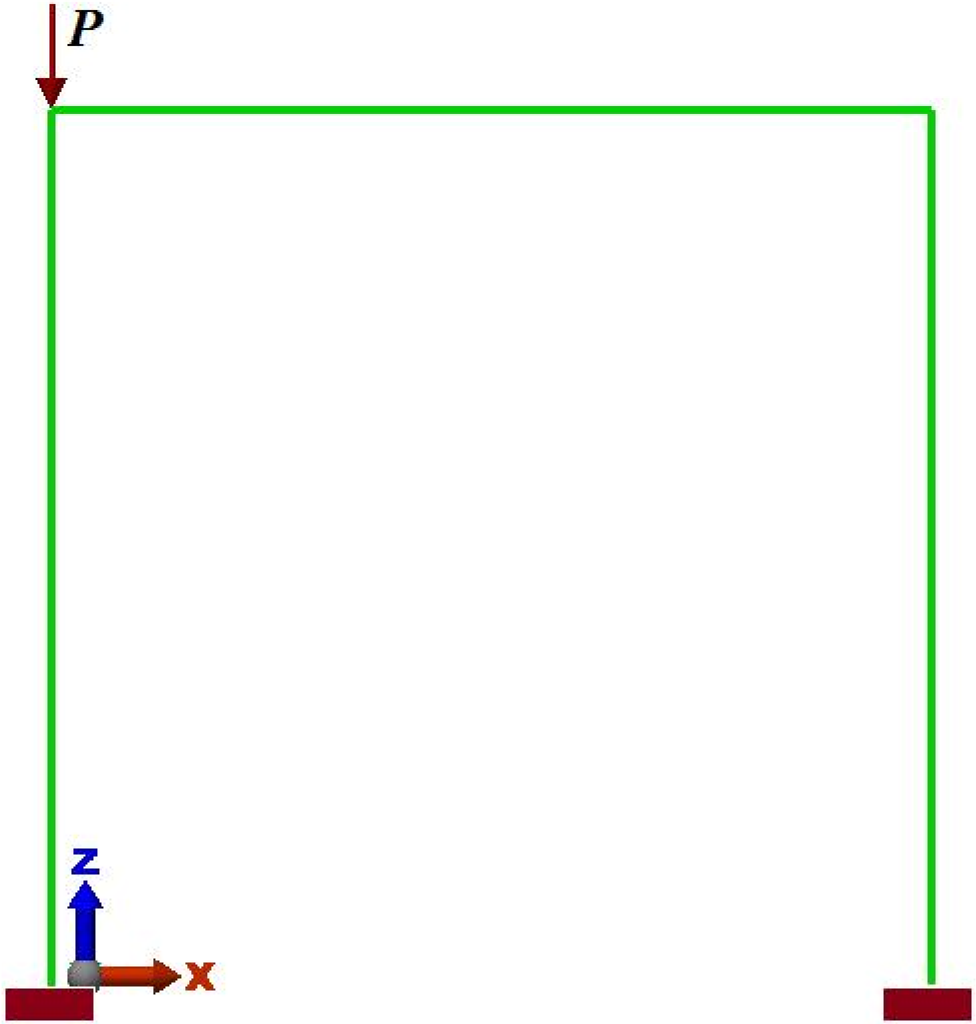
Stateczność ramy obciążonej siłą skupioną - przykłady 6-1 i 6-4 z książki: "Mechanika budowli - Ujęcie komputerowe" (MbUk)

ORIGIN := 1 *- Ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*



$E := 10\mathrm{GPa}$ *- Moduł Younga*

Wymiary przekrojów i długości elementów

$a_1 := 12\mathrm{cm}$ $b_1 := 10\mathrm{cm}$ $L1 := 10\mathrm{m}$

$a_2 := 12\mathrm{cm}$ $b_2 := 10\mathrm{cm}$ $L2 := 10\mathrm{m}$

$a_3 := 12\mathrm{cm}$ $b_3 := 10\mathrm{cm}$ $L3 := 10\mathrm{m}$

Dane zostały tak dobrane aby :

$$\frac{E \cdot J}{L^2} = 1\mathrm{kN}$$

ułatwi to porównanie wyników zamieszczonych w książce MbUk

Parametry pomocnicze:

$Lss := 3$ *- Liczba stopni swobody węzła*

$Le := 3$ *- Liczba elementów*

$Lw := 4$ *- Liczba węzłów*

$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań*

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

$l := 1m$ *- pomocnicza stała długość*

Ponieważ MathCad nie pozwala przechowywać w jednej macierzy składowych wyrażonych w różnych jednostkach to mamy do wyboru 2 mozliwości:
- nie zapisywać jednostek w których wyrażone są te składowe
- przekształcić tak te składowe, aby były jednolite (wyrażone w jednakowych jednostkach miary)

Wybieram 2 sposób i przekształcam niewiadome występujące w macierzach następująco (l - oznacza tu dowolną stałą o wymiarze długości) :

$$u_{zi} = l \cdot \varphi_i \quad u_{zj} = l \cdot \varphi_j \qquad M_i = l \cdot T_i \quad M_j = l \cdot T_j \qquad \lambda^2 = \frac{L^2 \cdot A}{J} \qquad \eta = \frac{L}{l}$$

Wszystkie poszukiwane przemieszczenia są więc przesunięciami, a węzłowe wielkości statyczne - siłami. Macierz sztywności zmieni sie więc do postaci, którą MathCad akceptuje:

$$\begin{pmatrix} Fxi \\ Fyi \\ Ti \\ Fxj \\ Fjy \\ Tj \end{pmatrix} = \left[\frac{E \cdot J}{L^3} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6\eta & 0 & -12 & 6\eta \\ 0 & 6\eta & 4\eta^2 & 0 & -6\eta & 2\eta^2 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6\eta & 0 & 12 & -6\eta \\ 0 & 6\eta & 2\eta^2 & 0 & -6\eta & 4\eta^2 \end{pmatrix} + \frac{S}{L} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0.1\eta & 0 & -1.2 & 0.1\eta \\ 0 & 0.1\eta & \frac{2}{15}\eta^2 & 0 & -0.1\eta & \frac{-1}{30}\eta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & -0.1\eta & 0 & 1.2 & -0.1\eta \\ 0 & 0.1\eta & \frac{-1}{30}\eta^2 & 0 & -0.1\eta & \frac{2}{15}\eta^2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} uxi \\ uyi \\ uzi \\ uxj \\ uyj \\ uzj \end{pmatrix}$$

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

```
LBM(A, B, w, k) := | for  i ∈ 0 .. rows(B) − 1
                   |    for  j ∈ 0 .. cols(B) − 1
                   |       A[w+i, k+j] ← B[1+i, 1+j]
                   | A
```

Funkcje ścisłe występujące w macierzy sztywności pręta ściskanego siłą osiową (MbUk)

$$\mathrm{Alfa}(x) := \frac{x \cdot (\sin(x) - x \cdot \cos(x))}{2(1 - \cos(x)) - x \cdot \sin(x)} \qquad \mathrm{Theta}(x) := \frac{x^2 \cdot (1 - \cos(x))}{2(1 - \cos(x)) - x \cdot \sin(x)}$$

$$\mathrm{Delta}(x) := \frac{x^3 \cdot \sin(x)}{2(1 - \cos(x)) - x \cdot \sin(x)}$$

Współrzędne węzłów kratownicy

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ L1 \\ 0 \\ L1 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} L1 \\ L1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

$$Wp := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Siły wewnętrzne w elementach

$$S := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} kN$$

$e := 1 .. Le$ *Pętla po wszystkich elementach ramy*

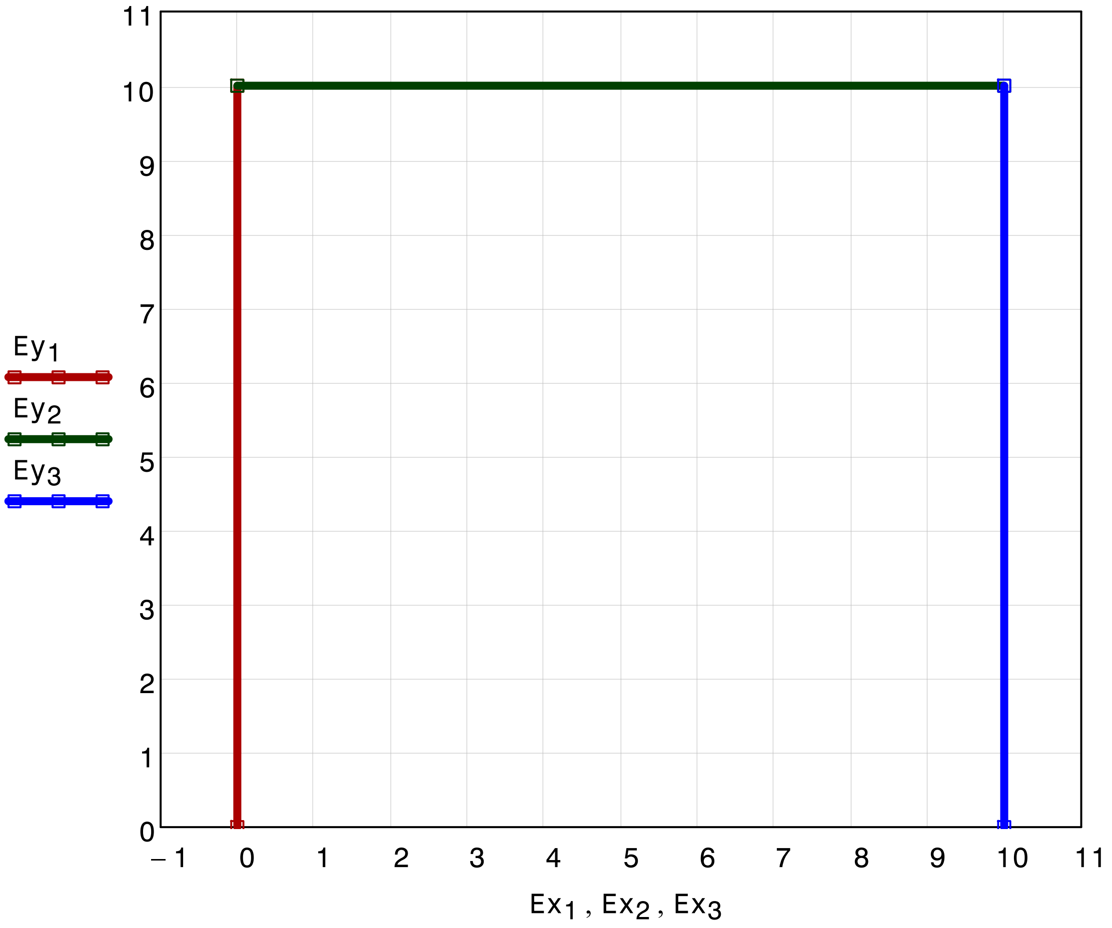
$A_e := b_e \cdot a_e$ *- Pole powierzchni przekroju elementów*

$J_e := \dfrac{a_e \cdot \left(b_e\right)^3}{12}$ *- Moment bezwładności przekroju elementów*

Rysunek elementów pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \qquad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix}$$

Ex, Ey - współrzędne węzłów elementów kratownicy



Wielkości pomocnicze do wyliczania składowych macierzy sztywności elementów ramy

$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)}$

$Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)}$

$L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$

$Lx =$ m

	1
1	0.000
2	10.000
3	0.000

$Ly =$ m

	1
1	10.000
2	0.000
3	10.000

$L =$ m

	1
1	10.000
2	10.000
3	10.000

$$\frac{E \cdot J_1}{(L_1)^2} = 1 \cdot kN$$

$\eta_e := \frac{L_e}{l}$

$\lambda 2_e := \frac{(L_e)^2 \cdot A_e}{J_e}$

$\mu_e := \frac{E \cdot J_e}{(L_e)^3}$

$\kappa_e := \frac{S_e}{L_e}$

$\eta =$

	1
1	10.000
2	10.000
3	10.000

$\lambda 2 =$

	1
1	120000.000
2	120000.000
3	120000.000

$\mu =$ $\cdot \frac{N}{m}$

	1
1	100.000
2	100.000
3	100.000

$\kappa =$ $\cdot \frac{N}{m}$

	1
1	0.000
2	0.000
3	-100.000

Bloki macierzy sztywności elementu ramowego w lokalnym układzie współrzednych

$$K11_e := \mu_e \cdot \begin{bmatrix} \lambda 2_e & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6\eta_e \\ 0 & 6\eta_e & 4(\eta_e)^2 \end{bmatrix} \qquad K12_e := \mu_e \cdot \begin{bmatrix} -\lambda 2_e & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6\eta_e \\ 0 & -6\eta_e & 2(\eta_e)^2 \end{bmatrix} \qquad K22_e := \mu_e \cdot \begin{bmatrix} \lambda 2_e & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6\eta_e \\ 0 & -6\eta_e & 4(\eta_e)^2 \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności elementu zapisana z użyciem bloków

$$K = \begin{pmatrix} K11 & K12 \\ K21 & K22 \end{pmatrix} \qquad K21 = K12^T$$

Bloki macierzy geometrycznych elementu ramowego w lokalnym układzie współrzednych

$$G11_e := \kappa_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0.1\eta_e \\ 0 & 0.1\eta_e & \frac{2}{15}(\eta_e)^2 \end{bmatrix} \qquad G12_e := \kappa_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 0.1\eta_e \\ 0 & -0.1\eta_e & \frac{-1}{30}(\eta_e)^2 \end{bmatrix} \qquad G22_e := \kappa_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & -0.1\eta_e \\ 0 & -0.1\eta_e & \frac{2}{15}(\eta_e)^2 \end{bmatrix}$$

Macierz geometryczna elementu zapisana z użyciem bloków

$$G = \begin{pmatrix} G11 & G12 \\ G21 & G22 \end{pmatrix} \qquad G21 = G12^T$$

Macierze obrotu do globalnego układu współrzednych

$$c_e := \frac{Lx_e}{L_e} \qquad s_e := \frac{Ly_e}{L_e}$$

$$R_e := \begin{pmatrix} c_e & -s_e & 0 \\ s_e & c_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformacja macierzy sztywności i macierzy geometrycznych elementu 1 do globalnego układu współrzędnych.
Uwaga! macierzy elementu 2 można nie transformować bo kąt obrotu jest równy 0

$$K11_e := R_e \cdot K11_e \cdot R_e^T \qquad K12_e := R_e \cdot K12_e \cdot R_e^T \qquad K22_e := R_e \cdot K22_e \cdot R_e^T$$

$$G11_e := R_e \cdot G11_e \cdot R_e^T \qquad G12_e := R_e \cdot G12_e \cdot R_e^T \qquad G22_e := R_e \cdot G22_e \cdot R_e^T$$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalszych obliczeniach, można pokazać bloki macierzy wszystkich elementów

$$K11_1 = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 & -6 \\ 0 & 12000 & 0 \\ -6 & 0 & 40 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad K11_2 = \begin{pmatrix} 12000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 6 \\ 0 & 6 & 40 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$K12_1 = \begin{pmatrix} -1.2 & 0 & -6 \\ 0 & -12000 & 0 \\ 6 & 0 & 20 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad K12_2 = \begin{pmatrix} -12000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 6 \\ 0 & -6 & 20 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$K22_1 = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 & 6 \\ 0 & 12000 & 0 \\ 6 & 0 & 40 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad K22_2 = \begin{pmatrix} 12000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & -6 \\ 0 & -6 & 40 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$G11_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad G12_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad G22_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$G11_3 = \begin{pmatrix} -0.12 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & -1.333 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad G12_3 = \begin{pmatrix} 0.12 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.333 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad G22_3 = \begin{pmatrix} -0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & -1.333 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 2$ $\quad$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 2$ $\quad$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$n = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad k = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$K := \sum_e \left[\left[\left(LBM\left(Ko, K11_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, K22_e, k_e, k_e\right)\right) + LBM\left(Ko, K12_e, n_e, k_e\right)\right] + LBM\left(Ko, {K12_e}^T, k_e, n_e\right)\right]$$

$$G := \sum_e \left[\left[\left(LBM\left(Ko, G11_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, G22_e, k_e, k_e\right)\right) + LBM\left(Ko, G12_e, n_e, k_e\right)\right] + LBM\left(Ko, {G12_e}^T, k_e, n_e\right)\right]$$

K =

	1	2	3	4	5	6
1	12001.2	0.0	6.0	-12000.0	0.0	0.0
2	0.0	12001.2	6.0	0.0	-1.2	6.0
3	6.0	6.0	80.0	0.0	-6.0	20.0
4	-12000.0	0.0	0.0	12001.2	0.0	6.0
5	0.0	-1.2	-6.0	0.0	12001.2	-6.0
6	0.0	6.0	20.0	6.0	-6.0	80.0
7	-1.2	0.0	-6.0	0.0	0.0	0.0
8	0.0	-12000.0	0.0	0.0	0.0	0.0
9	6.0	0.0	20.0	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0	-1.2	0.0	-6.0
11	0.0	0.0	0.0	0.0	-12000.0	0.0
12	0.0	0.0	0.0	6.0	0.0	...

$\cdot \dfrac{kN}{m}$

$G =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	-0.1	0.0	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.1
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	-0.1	0.0	-1.3	0.0	0.0	0.0	0.1
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	-0.1
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
12	0.0	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.3	0.0	0.0	0.0	...

$\cdot \frac{kN}{m}$

Globalna macierz sztywności **K** *i macierz geometryczna* **G** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$, $|\mathbf{G}|=0$

$$\left|K \cdot \frac{1m}{kN}\right| = 0.000 \times 10^{0}$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

$$\left|G \cdot \frac{1m}{kN}\right| = 0.000 \times 10^{0}$$

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Kopiowanie Macierzy **K** *przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$Ko := K \qquad\qquad Go := G$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$Lwb := 6$ *- liczba warunków brzegowych*

$$s := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$ *- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach*

$i := 1 .. Lr \qquad\qquad j := 1 .. Lwb$

$Ko_{s_j, i} := 0 \qquad\qquad Go_{s_j, i} := 0$ *zerowanie wierszy*

$Ko_{i, s_j} := 0 \qquad\qquad Go_{i, s_j} := 0$ *zerowanie kolumn*

$Ko_{s_j, s_j} := 1 \dfrac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$Ko =$

	1	2	3	4	5	6	7
1	12001.2	0	6	-12000	0	0	0
2	0	12001.2	6	0	-1.2	6	0
3	6	6	80	0	-6	20	0
4	-12000	0	0	12001.2	0	6	0
5	0	-1.2	-6	0	12001.2	-6	0
6	0	6	20	6	-6	80	0
7	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	...

$\cdot \frac{kN}{m}$

$Go =$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-0.12	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	-0.1	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	...

$\cdot \frac{kN}{m}$

$\left| Ko \cdot 1 \frac{m}{kN} \right| = 1.742 \times 10^{16}$ *- wyznacznik macierzy* $\mathbf{K}_0$ *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}_0| > 0$

$\left| Go \cdot 1 \frac{m}{kN} \right| = 0.000 \times 10^{0}$ *- wyznacznik macierzy* $\mathbf{G}_0$ *może być równy zeru*

$|Ko + \sigma \cdot Go| = 0$ *- warunek niejednoznaczności przemieszczeń, czyli mozliwość utraty stateczności*

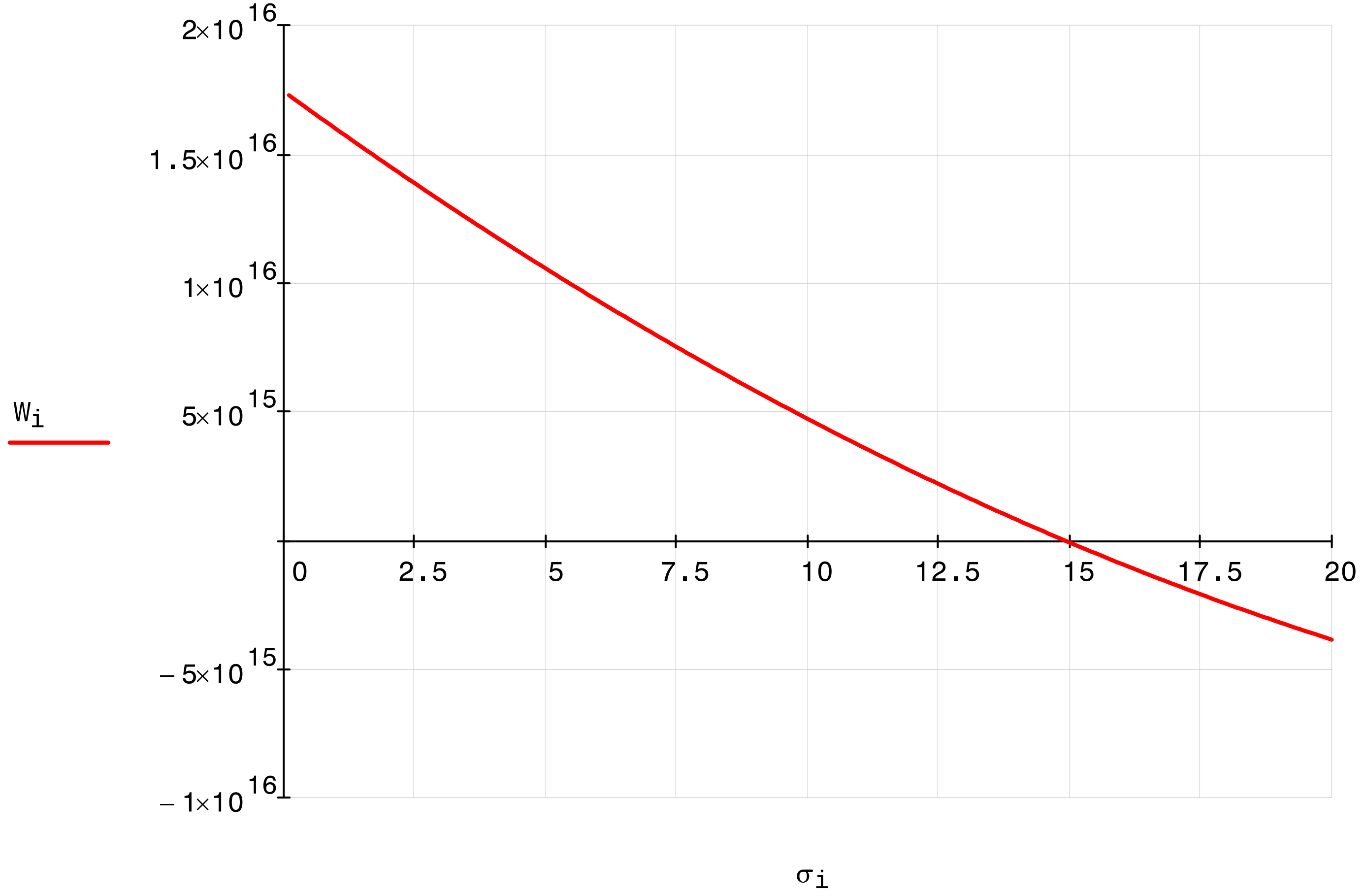
$KG(x) := (Ko + x \cdot Go) \cdot \frac{m}{kN}$

$N := 200$

$i := 1 .. N \qquad \sigma_i := i \cdot 0.1$

$W_i := \left|KG(\sigma_i)\right|$

Wykres zmienności wyznacznika macierzy



Oszacowanie "z dołu" i "z góry" wartości siły krytycznej za pomocą wzoru Eulera

$P1 := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_1}{(1 \cdot L_1)^2} \qquad P1 = 9.870 \cdot kN$

$P2 := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_1}{(0.699 \cdot L_1)^2} \qquad P2 = 20.200 \cdot kN$

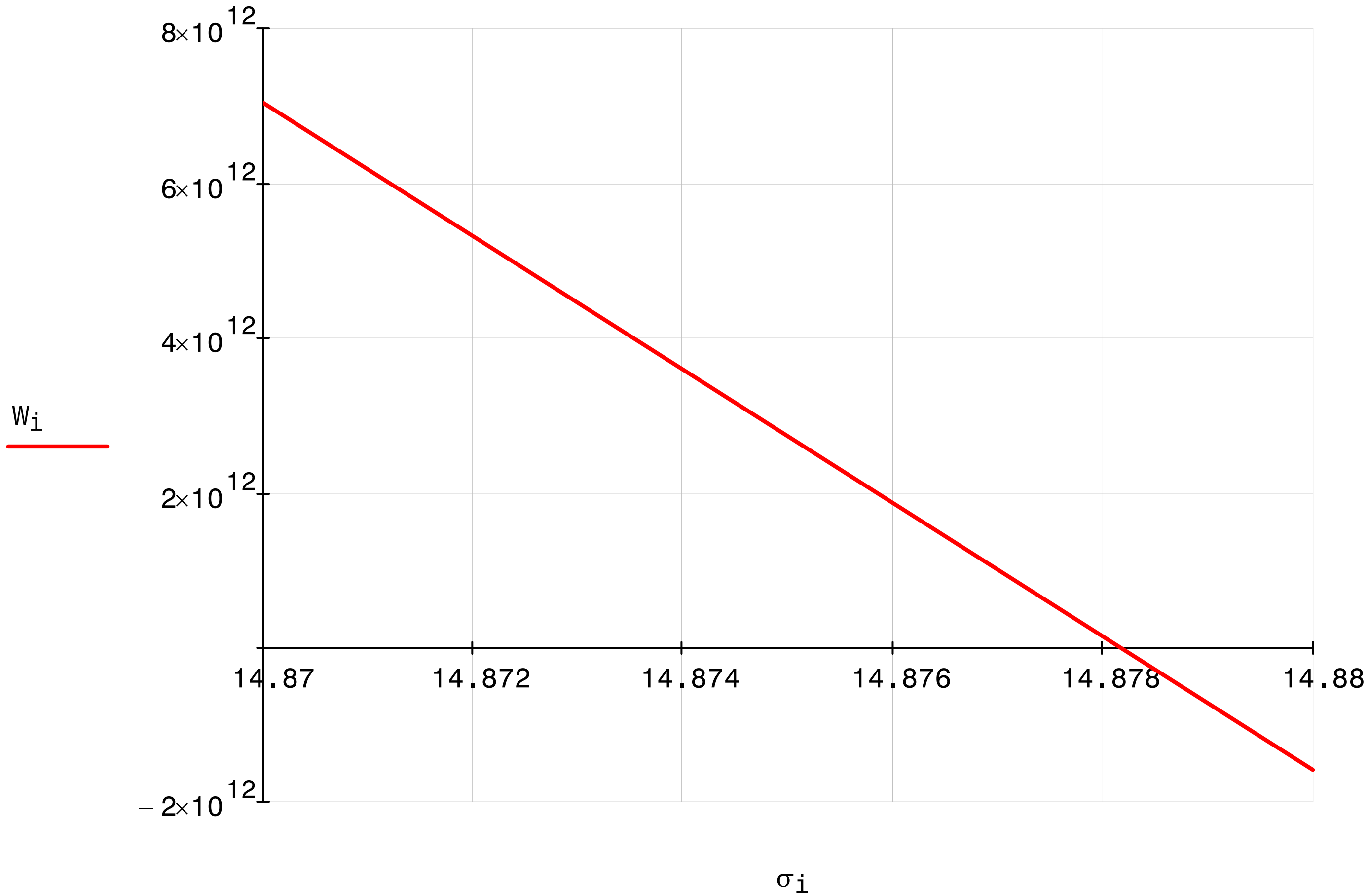
$\frac{E \cdot J_1}{(L_1)^2} = 1.000 \cdot kN$

$N1 := 1487$ $\quad N2 := 1488$

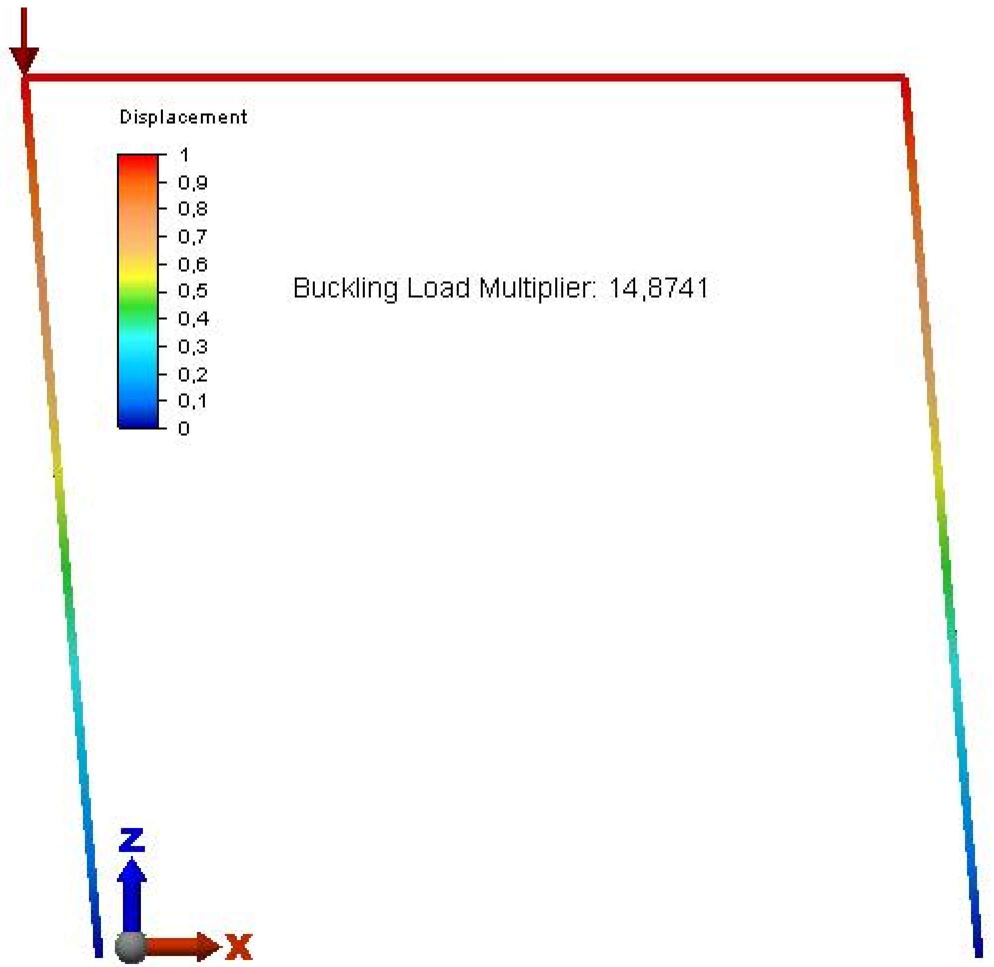
$i := N1 .. N2$ $\quad \sigma_i := i \cdot 0.01$

$W_i := \left|KG(\sigma_i)\right|$

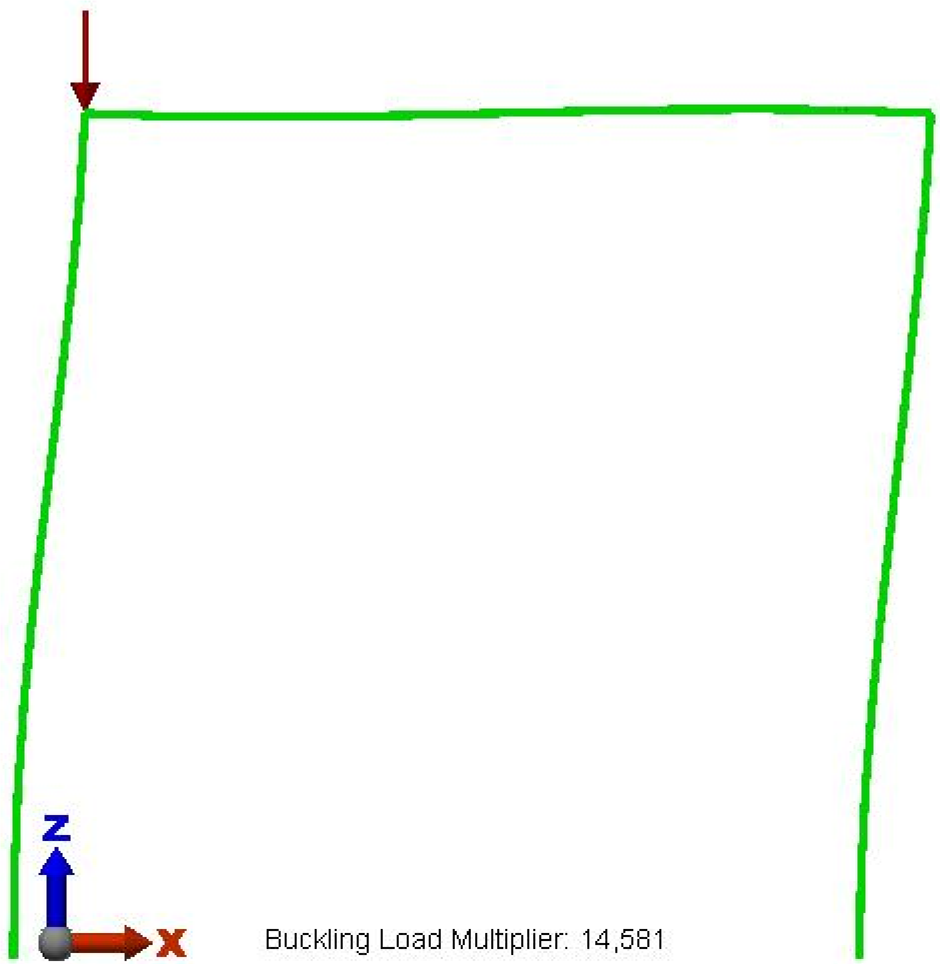
Siła krytyczna ma przybliżoną wartość Pkr=14,878 kN - jest nieco mniejsza niż wartość podana w książce MbUk, przykład 6-4b (14,8794), gdyż w tym przykładzie uwzględniono ściśliwość podłużną prętów



Siła krytyczna wyliczona za pomocą Algora bez podziału prętów na większą liczbę elementów Pkr=14,8741 kN



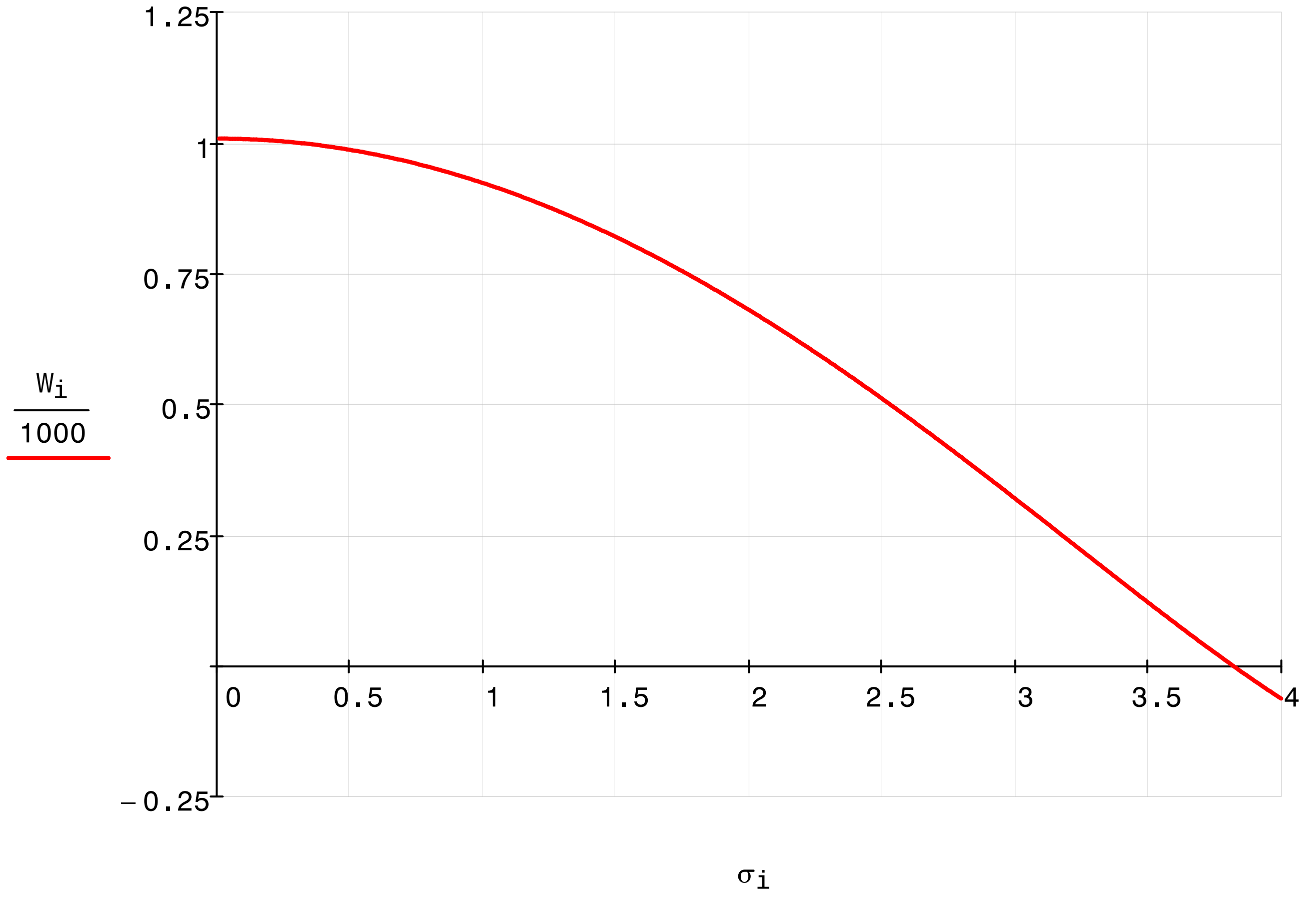
Siła krytyczna wyliczona za pomocą Algora przy podziale prętów na 10 elementów Pkr=14,581 kN



Obliczenie siły krytycznej za pomocą ścisłych funkcji (MbUk)

$$KG(x) := \begin{pmatrix} 4 + \mathrm{Alfa}(x) & 2 & -\mathrm{Theta}(x) \\ 2 & 8 & -6 \\ -\mathrm{Theta}(x) & -6 & 12 + \mathrm{Delta}(x) \end{pmatrix}$$

$N := 400 \qquad i := 1 .. N \qquad \sigma_i := i \cdot 0.01 \qquad W_i := \left|KG(\sigma_i)\right|$

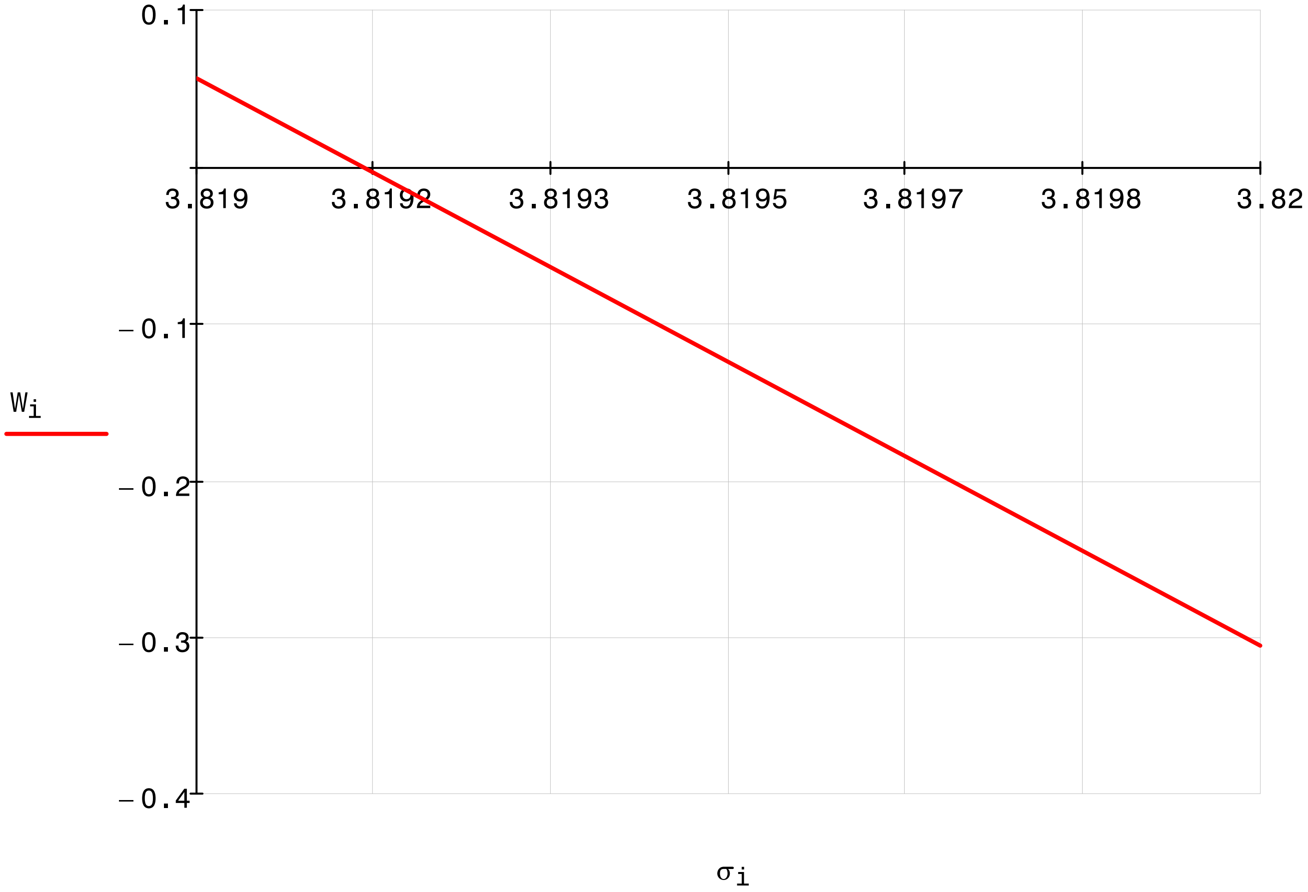


$N1 := 3819$ $N2 := 3820$

$i := N1 .. N2$ $\sigma_i := i \cdot 0.001$

$W_i := \left|KG(\sigma_i)\right|$

Siła krytyczna wyliczona za pomocą ścisłych funkcji Alfa, Theta, Delta oraz założeniu nieściśliwości prętów ma wartość Pkr=14,586 kN - jest nieco mniejsza niż wartość obliczona MES bez podziału prętów ale trochę większa niż obliczone MES z podziałem pręta sciskanego na 10 elementów i uwzględnieniu ściśliwości podłużnej preta



$\sigma := 3.8192$

$$Pkr := \sigma^2 \cdot \frac{E \cdot J_1}{(L_1)^2}$$

$Pkr = 14.586 \cdot kN$