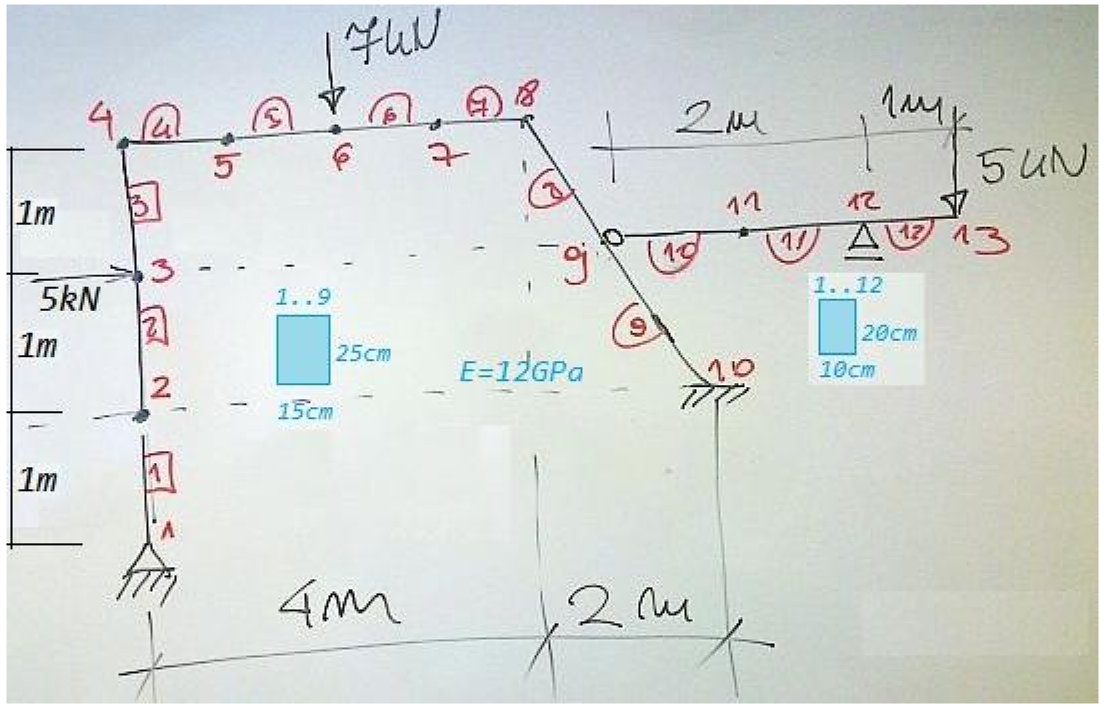
# Statyka ramy płaskiej obciążonej siłami




$ORIGIN := 1$ - ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy

$E := 1.2 \cdot 10^7$ [kPa] - moduł Younga

$\alpha t := 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}$ - współczynnik rozszerzalności cieplnej

$b1 := 0.15 \quad h1 := 0.25$ [m] - wymiary przekroju Nr1

$b2 := 0.10 \quad h2 := 0.20$ [m] - wymiary przekroju Nr2

$A1 := b1 \cdot h1 = 0.038$ [$m^2$] - Pole powierzchni przekroju elementów

$A2 := b2 \cdot h2 = 0.020$ [$m^2$] - Pole powierzchni przekroju elementów

$J1 := \frac{A1 \cdot h1^2}{12} = 1.953 \times 10^{-4}$ [$m^4$] - Moment bezwładności przekroju

$J2 := \frac{A2 \cdot h2^2}{12} = 6.667 \times 10^{-5}$ [$m^4$] - Moment bezwładności przekroju

Parametry pomocnicze:

$Lss := 3$ - Liczba stopni swobody węzła

$Le := 12$ - Liczba elementów

$Lw := 13$ - Liczba węzłów

$Lr := Lss \cdot Lw$ - Liczba równań

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności

```
LBM(A, B, w, k) := | for i ∈ 1 .. rows(B)
                   |   for j ∈ 1 .. cols(B)
                   |     A[w+i-1, k+j-1] ← B[i, j]
                   | A
```

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami

$po_{Lr} := 0$ Deklaracja globalnego wektora sił węzłowych i wypełnienie go zerami

*Współrzędne węzłów ramy*

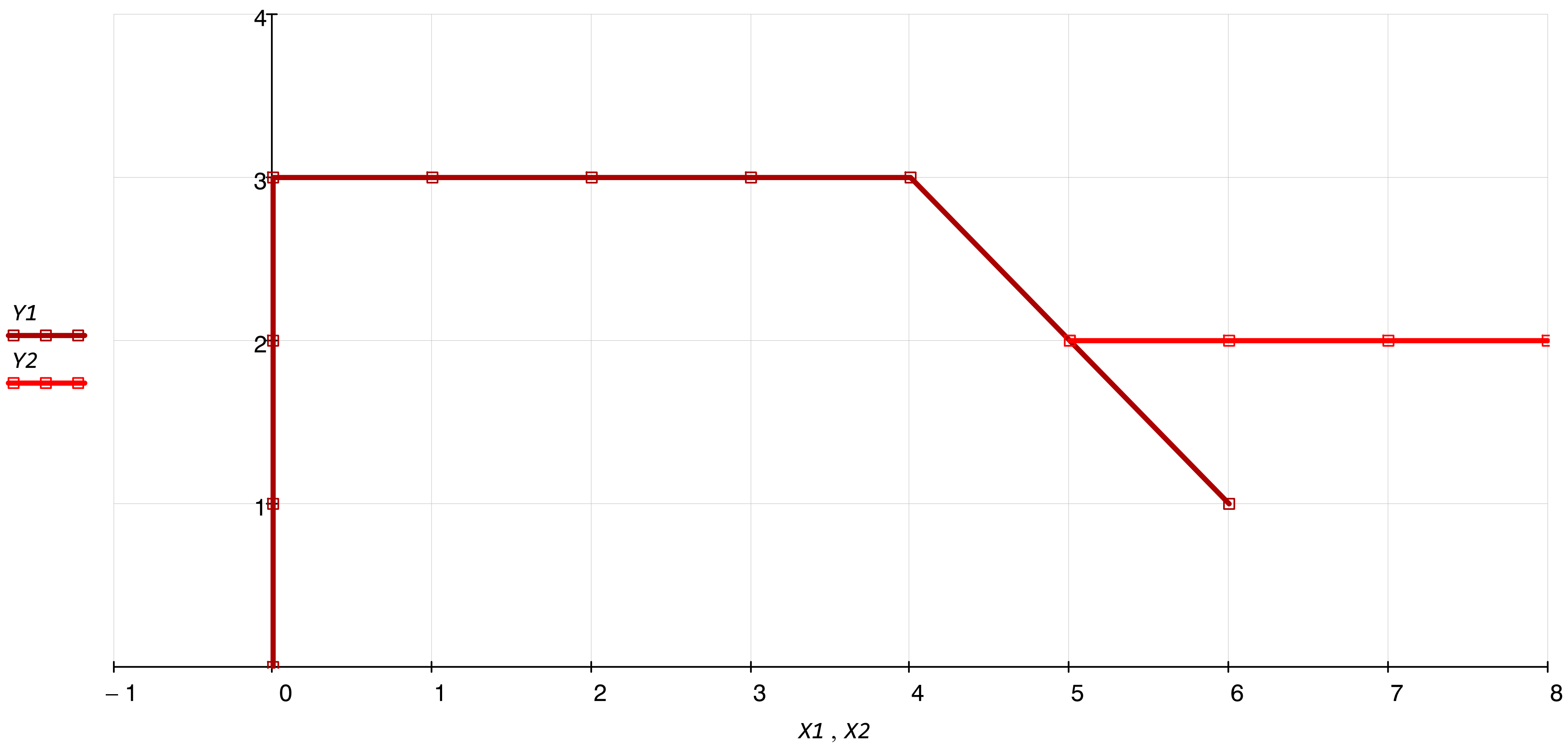
$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

*Numery węzłów początkowych (Wp)*
*i końcowych (Wk) elementów*

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 9 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

*Przekroje elementów*

$$A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \end{pmatrix} \qquad J := \begin{pmatrix} J1 \\ J1 \\ J1 \\ J1 \\ J1 \\ J1 \\ J1 \\ J1 \\ J1 \\ J2 \\ J2 \\ J2 \end{pmatrix}$$



*Pętla po wszystkich elementach ramy*

$e := 1 .. \; Le$

*Macierze sztywności elementów ramy sztywno połączonych z węzłami*

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{(L)^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{bmatrix}$$

*Macierze sztywności elementów ramy z przegubem w węźle początkowym*

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{(L)^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)}$$

$$Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)}$$

$$L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$$

*Macierze obrotu*

$$R_e := \frac{1}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} Lx_e & -Ly_e & 0 \\ Ly_e & Lx_e & 0 \\ 0 & 0 & (L_e) \end{bmatrix}$$

*Bloki macierzy sztywności elementów*

$$D_e := \frac{E}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} A_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot J_e}{(L_e)^2} & \frac{6 \cdot J_e}{L_e} \\ 0 & \frac{6 \cdot J_e}{L_e} & 4 \cdot J_e \end{bmatrix} \qquad C_e := \frac{E}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} -A_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 \cdot J_e}{(L_e)^2} & \frac{6 \cdot J_e}{L_e} \\ 0 & \frac{-6 \cdot J_e}{L_e} & 2 \cdot J_e \end{bmatrix} \qquad B_e := \frac{E}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} A_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot J_e}{(L_e)^2} & \frac{-6 \cdot J_e}{L_e} \\ 0 & \frac{-6 \cdot J_e}{L_e} & 4 \cdot J_e \end{bmatrix}$$

$e := 10$ *Korekta macierzy sztywności elementu nr 10*

$$D_e := \frac{E}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} A_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot J_e}{(L_e)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_e := \frac{E}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} -A_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3 \cdot J_e}{(L_e)^2} & \frac{3 \cdot J_e}{L_e} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_e := \frac{E}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} A_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot J_e}{(L_e)^2} & \frac{-3 \cdot J_e}{L_e} \\ 0 & \frac{-3 \cdot J_e}{L_e} & 3 \cdot J_e \end{bmatrix}$$

$e := 1 .. \ Le$

$Dg_e := R_e \cdot D_e \cdot R_e^{T}$ $\quad$ $Bg_e := R_e \cdot B_e \cdot R_e^{T}$ $\quad$ $Cg_e := R_e \cdot C_e \cdot R_e^{T}$ $\quad$ *Bloki macierzy w układzie globalnym*

*Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej*

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 2$ $\quad$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 2$ $\quad$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych ($n_e$) i końcowych ($k_e$)*

$$K := \sum_{e} \left( LBM\left(Ko, Dg_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, Bg_e, k_e, k_e\right) + LBM\left(Ko, Cg_e, n_e, k_e\right) + LBM\left(Ko, Cg_e^{T}, k_e, n_e\right) \right)$$

*Globalny wektor sił węzłowych* $\quad p := po$

*Wstawianie sił do wektora "prawej strony"*

$Fx3 := 5$ $\quad$ $Fy6 := -7$ $\quad$ $Fy13 := -5$

$p_7 := Fx3$ $\quad$ $p_{17} := Fy6$ $\quad$ $p_{38} := Fy13$

$K =$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 28125.0 | 0.0 | -14062.5 | -28125.0 | 0.0 | -14062.5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 0.0 | 450000.0 | 0.0 | 0.0 | -450000.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 3 | -14062.5 | 0.0 | 9375.0 | 14062.5 | 0.0 | 4687.5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 4 | -28125.0 | 0.0 | 14062.5 | 56250.0 | 0.0 | 0.0 | -28125.0 | 0.0 | -14062.5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 5 | 0.0 | -450000.0 | 0.0 | 0.0 | 900000.0 | 0.0 | 0.0 | -450000.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 6 | -14062.5 | 0.0 | 4687.5 | 0.0 | 0.0 | 18750.0 | 14062.5 | 0.0 | 4687.5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -28125.0 | 0.0 | 14062.5 | 56250.0 | 0.0 | 0.0 | -28125.0 | 0.0 | -14062.5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 8 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -450000.0 | 0.0 | 0.0 | 900000.0 | 0.0 | 0.0 | -450000.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 9 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -14062.5 | 0.0 | 4687.5 | 0.0 | 0.0 | 18750.0 | 14062.5 | 0.0 | 4687.5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 10 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -28125.0 | 0.0 | 14062.5 | 478125.0 | 0.0 | 14062.5 | -450000.0 | 0.0 | 0.0 |
| 11 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -450000.0 | 0.0 | 0.0 | 478125.0 | 14062.5 | 0.0 | -28125.0 | 14062.5 |
| 12 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -14062.5 | 0.0 | 4687.5 | 14062.5 | 14062.5 | 18750.0 | 0.0 | -14062.5 | 4687.5 |
| 13 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -450000.0 | 0.0 | 0.0 | 900000.0 | 0.0 | 0.0 |
| 14 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -28125.0 | -14062.5 | 0.0 | 56250.0 | 0.0 |
| 15 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 14062.5 | 4687.5 | 0.0 | 0.0 | 18750.0 |
| 16 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -450000.0 | 0.0 | 0.0 |
| 17 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -28125.0 | -14062.5 |
| 18 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 14062.5 | 4687.5 |
| 19 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 20 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 21 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 22 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 23 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 24 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 25 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 26 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 27 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 28 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 29 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 30 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 31 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 32 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | ... |

$p =$

| | 1 |
|---|---|
| 1 | 0.000000 |
| 2 | 0.000000 |
| 3 | 0.000000 |
| 4 | 0.000000 |
| 5 | 0.000000 |
| 6 | 0.000000 |
| 7 | 5.000000 |
| 8 | 0.000000 |
| 9 | 0.000000 |
| 10 | 0.000000 |
| 11 | 0.000000 |
| 12 | 0.000000 |
| 13 | 0.000000 |
| 14 | 0.000000 |
| 15 | 0.000000 |
| 16 | 0.000000 |
| 17 | -7.000000 |
| 18 | 0.000000 |
| 19 | 0.000000 |
| 20 | 0.000000 |
| 21 | 0.000000 |
| 22 | 0.000000 |
| 23 | 0.000000 |
| 24 | 0.000000 |
| 25 | 0.000000 |
| 26 | 0.000000 |
| 27 | 0.000000 |
| 28 | 0.000000 |
| 29 | 0.000000 |
| 30 | 0.000000 |
| 31 | 0.000000 |
| 32 | ... |

*Globalna macierz sztywności* **K** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$ $\quad$ $|K| = 6.514 \times 10^{110}$

*Kopiowanie Macierzy **K** i wektora **p** przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$K0 := K \qquad p0 := p$

*Uwzględnienie warunków brzegowych*

$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 28 \\ 29 \\ 30 \\ 35 \end{pmatrix}$ *- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach*

$Lwb := rows(s)$ *- liczba warunków brzegowych*

$i := 1 .. Lr \qquad j := 1 .. Lwb$

$K0_{s_j, i} := 0$ *zerowanie wierszy*

$K0_{s_j, s_j} := 1$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$p0_{s_j} := 0$ *zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"*

$K0 =$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | -14062.500 | 0.000 | 9375.000 | 14062.500 | 0.000 | 4687.500 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | -28125.000 | 0.000 | 14062.500 | 56250.000 | 0.000 | 0.000 | -28125.000 | 0.000 | -14062.500 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.000 | -450000.000 | 0.000 | 0.000 | 900000.000 | 0.000 | 0.000 | -450000.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | -14062.500 | 0.000 | 4687.500 | 0.000 | 0.000 | 18750.000 | 14062.500 | 0.000 | 4687.500 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -28125.000 | 0.000 | 14062.500 | 56250.000 | 0.000 | 0.000 | -28125.000 | 0.000 | -14062.500 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -450000.000 | 0.000 | 0.000 | 900000.000 | 0.000 | 0.000 | -450000.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -14062.500 | 0.000 | 4687.500 | 0.000 | 0.000 | 18750.000 | 14062.500 | 0.000 | 4687.500 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -28125.000 | 0.000 | 14062.500 | 478125.000 | 0.000 | 14062.500 | -450000.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -450000.000 | 0.000 | 0.000 | 478125.000 | 14062.500 | 0.000 | -28125.000 | 14062.500 |
| 12 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -14062.500 | 0.000 | 4687.500 | 14062.500 | 14062.500 | 18750.000 | 0.000 | -14062.500 | 4687.500 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -450000.000 | 0.000 | 0.000 | 900000.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -28125.000 | -14062.500 | 0.000 | 56250.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 14062.500 | 4687.500 | 0.000 | 0.000 | ... |

$|K0| = 2.1309347 \times 10^{150}$ *- wyznacznik macierzy $\mathbf{K}_o$ jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}_o| > 0$

*Rozwiązanie układu równań:* $u := \mathrm{lsolve}(K0, p0)$

*Obliczenie reakcji podpór:* $r := K \cdot u - p$

$r =$

| | 1 |
|---|---|
| 24 | 0.000 |
| 25 | 0.000 |
| 26 | 0.000 |
| 27 | 0.000 |
| 28 | -4.446 |
| 29 | 0.768 |
| 30 | 2.448 |
| 31 | 0.000 |
| 32 | 0.000 |
| 33 | 0.000 |
| 34 | -0.000 |
| 35 | 7.500 |
| 36 | -0.000 |
| 37 | -0.000 |
| 38 | 0.000 |
| 39 | ... |

*kN*

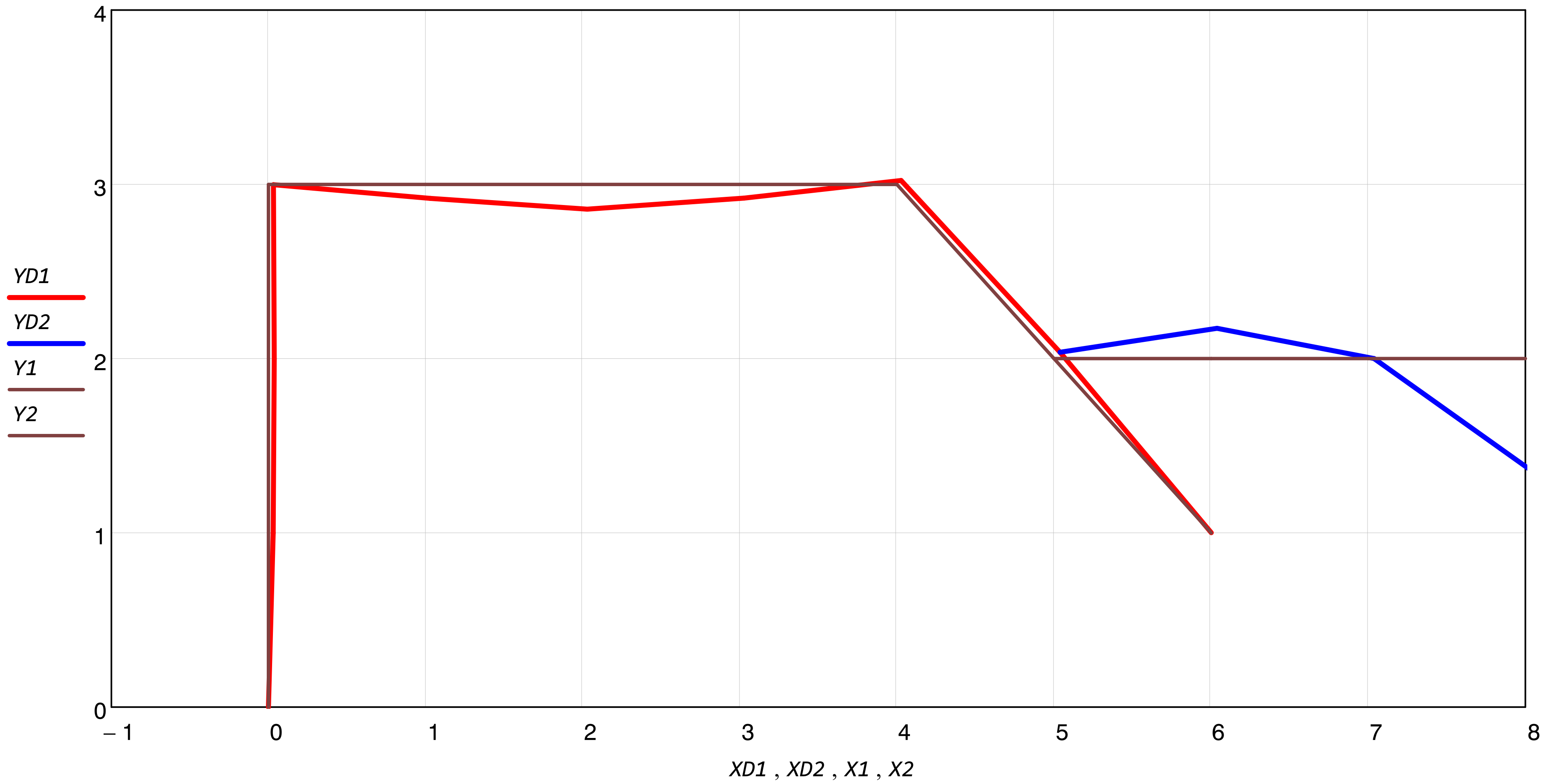
$1000u =$

| | 1 |
|---|---|
| 1 | -0.000000 |
| 2 | 0.000000 |
| 3 | -0.338323 |
| 4 | 0.298902 |
| 5 | -0.008294 |
| 6 | -0.220061 |
| 7 | 0.361281 |
| 8 | -0.016588 |
| 9 | 0.134724 |
| 10 | 0.306168 |
| 11 | -0.024882 |
| 12 | -0.340635 |
| 13 | 0.296289 |
| 14 | -0.811995 |
| 15 | -0.968190 |
| 16 | 0.286410 |
| 17 | ... |

*mm,*
*fi*1000 rd*

*Rysunek przemieszczeń pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników*

$skala := 100$

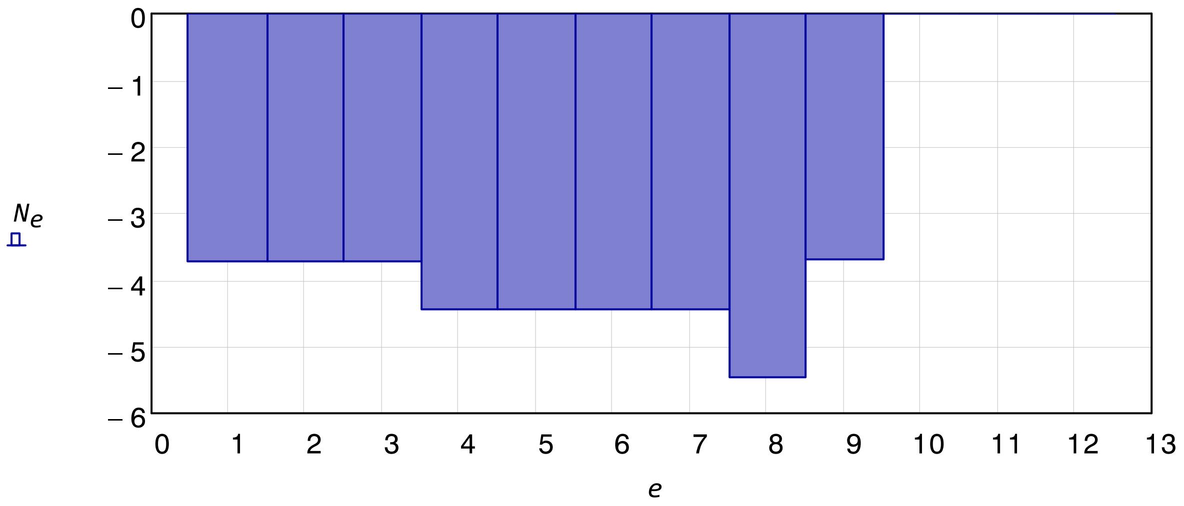


## *Obliczenie sił wewnętrznych*

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{k_e} - u_{n_e}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{k_{e+1}} - u_{n_{e+1}}\right) \cdot Ly_e\right]$$ *- siły osiowe*

$N =$

| | 1 |
|---|---|
| 1 | -3.732 |
| 2 | -3.732 |
| 3 | -3.732 |
| 4 | -4.446 |
| 5 | -4.446 |
| 6 | -4.446 |
| 7 | -4.446 |
| 8 | -5.454 |
| 9 | -3.686 |
| 10 | $-1.301 \cdot 10^{-14}$ |
| 11 | $-2.602 \cdot 10^{-14}$ |
| 12 | $-1.301 \cdot 10^{-14}$ |




$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{(L)^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{bmatrix}$$

### *Siły poprzeczne*

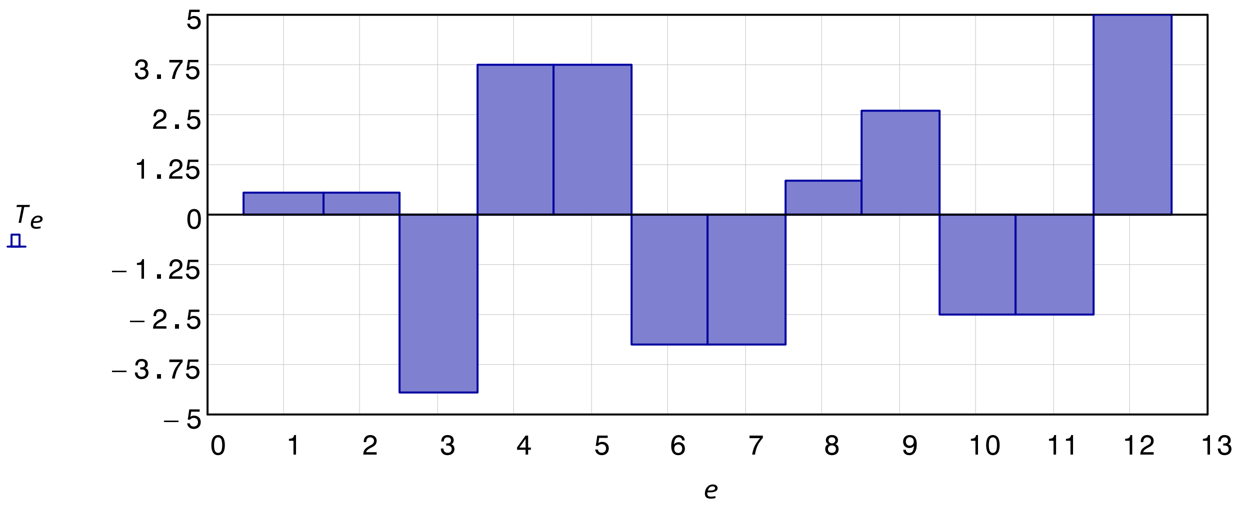
$$T_e := \frac{12E \cdot J_e}{\left(L_e\right)^4} \cdot \left[\left(u_{k_e} - u_{n_e}\right) \cdot Ly_e + \left(u_{n_{e+1}} - u_{k_{e+1}}\right) \cdot Lx_e\right] + \frac{6E \cdot J_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left(u_{n_{e+2}} + u_{k_{e+2}}\right)$$

$e := 10$ $$T_e := \frac{3E \cdot J_e}{\left(L_e\right)^4} \cdot \left[\left(u_{k_e} - u_{n_e}\right) \cdot Ly_e + \left(u_{n_{e+1}} - u_{k_{e+1}}\right) \cdot Lx_e\right] + \frac{3E \cdot J_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot u_{k_{e+2}}$$ *- poprawka dla elementu nr 10*

$e := 1 .. Le$

$T =$

| | 1 |
|---|---|
| 1 | 0.554 |
| 2 | 0.554 |
| 3 | -4.446 |
| 4 | 3.732 |
| 5 | 3.732 |
| 6 | -3.268 |
| 7 | -3.268 |
| 8 | 0.833 |
| 9 | 2.601 |
| 10 | -2.5 |
| 11 | -2.5 |
| 12 | 5 |



*Momenty zginające*

$$Mi_e := \frac{6E\cdot J_e}{(L_e)^3}\cdot\left[\left(u_{k_e}-u_{n_e}\right)\cdot Ly_e+\left(u_{n_e+1}-u_{k_e+1}\right)\cdot Lx_e\right]+\frac{2E\cdot J_e}{L_e}\cdot\left(2\,u_{n_e+2}+u_{k_e+2}\right)$$

$$Mj_e := \frac{6E\cdot J_e}{(L_e)^3}\cdot\left[\left(u_{k_e}-u_{n_e}\right)\cdot Ly_e+\left(u_{n_e+1}-u_{k_e+1}\right)\cdot Lx_e\right]+\frac{2E\cdot J_e}{L_e}\cdot\left(u_{n_e+2}+2\,u_{k_e+2}\right)$$

$e := 10$ *- poprawka dla elementu nr 10*

$Mi_e := 0$

$$Mj_e := \frac{3E\cdot J_e}{(L_e)^3}\cdot\left[\left(u_{k_e}-u_{n_e}\right)\cdot Ly_e+\left(u_{n_e+1}-u_{k_e+1}\right)\cdot Lx_e\right]+\frac{3E\cdot J_e}{L_e}\cdot u_{k_e+2}$$

$e := 1 .. 9 \qquad M_1 := Mi_1 \qquad M_{e+1} := Mj_e$

$e := 10 .. Le \qquad Mb_9 := Mi_{10} \qquad Mb_e := Mj_e$

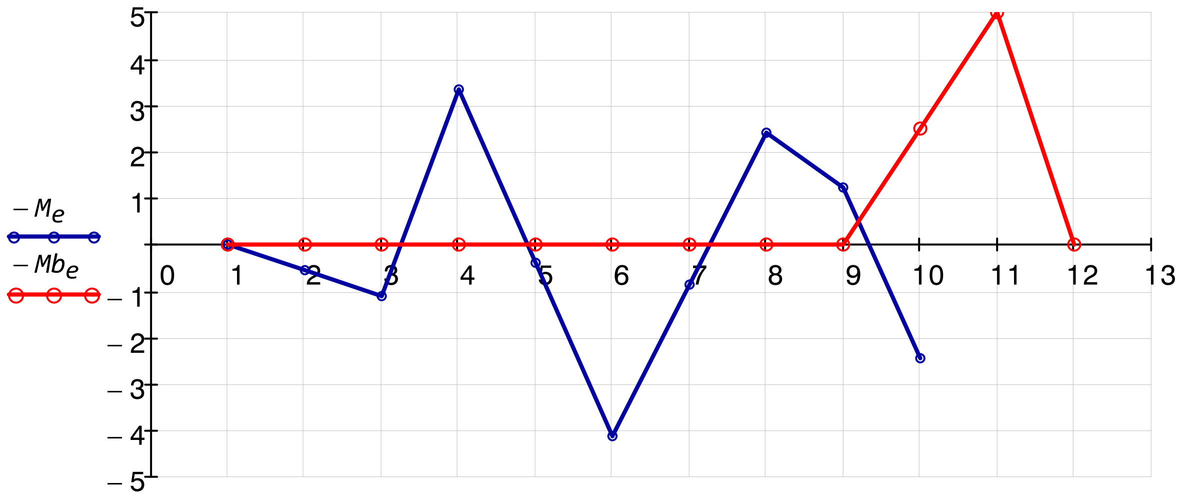
$e := 1 .. Le$

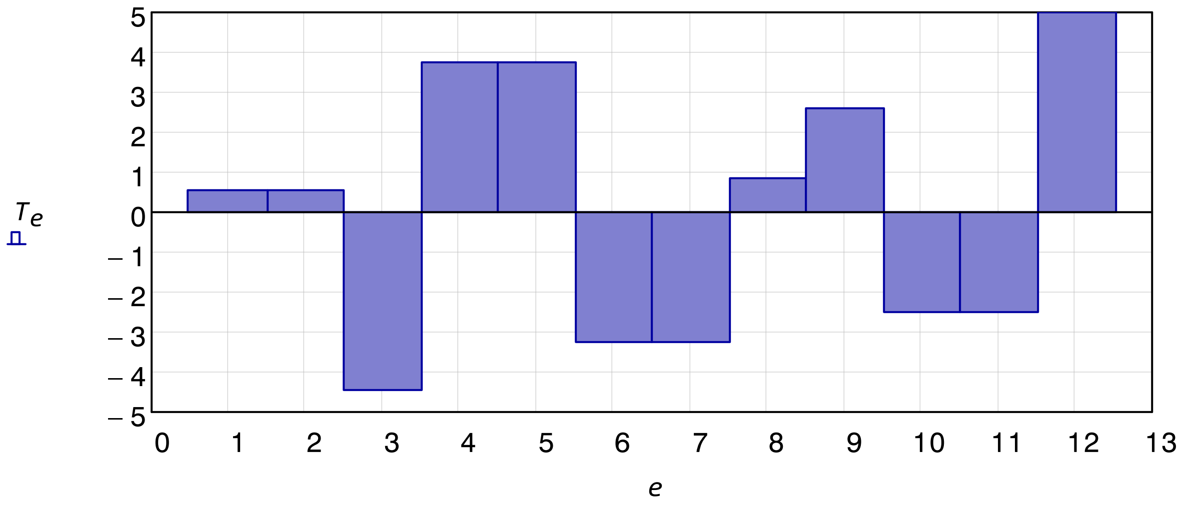
$Mi =$

| | 1 |
|---|---|
| 1 | 0.000 |
| 2 | -0.554 |
| 3 | -1.109 |
| 4 | 3.337 |
| 5 | -0.395 |
| 6 | -4.128 |
| 7 | -0.860 |
| 8 | 2.408 |
| 9 | 1.230 |
| 10 | 0.000 |
| 11 | 2.500 |
| 12 | 5.000 |

$Mj =$

| | 1 |
|---|---|
| 1 | 0.554 |
| 2 | 1.109 |
| 3 | -3.337 |
| 4 | 0.395 |
| 5 | 4.128 |
| 6 | 0.860 |
| 7 | -2.408 |
| 8 | -1.230 |
| 9 | 2.448 |
| 10 | -2.500 |
| 11 | -5.000 |
| 12 | 0.000 |




$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{(L)^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{(L)^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{bmatrix}$$