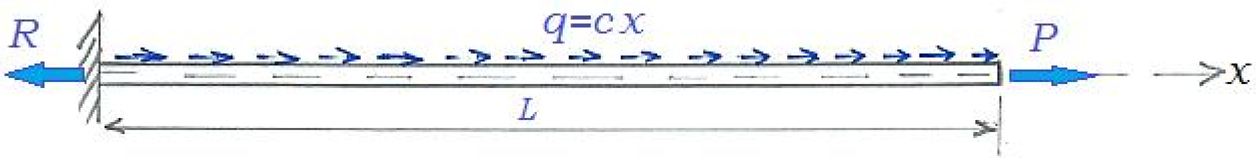
$ORIGIN := 1$

Metoda Rayleigha-Ritza wyznaczenia przybliżonego rozwiązania problemu pręta rozciąganego



$E := 10GPa$ - moduł Younga

$c := 10\dfrac{kN}{m^2}$ $\quad P := 5kN$ $\quad L := 4m$ $\quad A := 10cm^2$ $\quad \xi = \dfrac{x}{L}$ $\quad \kappa := \dfrac{c\cdot L^2}{2\cdot P} = 16$

$$R = P + \int_0^L q(x)\,dx \qquad R := P + c\cdot\int_0^L x\,dx = 85\cdot kN$$

Energia odkształconego pręta w położeniu równowagi dąży do minimum

$$\Phi = \int \left(\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^T\cdot E\cdot\varepsilon\right)dV - \int_0^L c\cdot x\cdot u\,dx - P\cdot u(L)$$ ---------> minimum

$$\Phi = \frac{E \cdot A}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{d}{dx} u\right)^2 dx - \int_0^L c \cdot x \cdot u \; dx - P \cdot u(L) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{E \cdot A}{2L} \cdot \int_0^1 \left(\frac{d}{d\xi} u\right)^2 d\xi - \int_0^1 L^2 \cdot c \cdot \xi \cdot u \; d\xi - P \cdot u(1)$$

Rozwiązania przybliżonego poszukujemy w postaci wielomianu, który spełnia warunki brzegowe:

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2 \qquad u(0) = 0 \quad \text{--------->} \quad a_0 = 0$$

$$\frac{d}{dx} u = \frac{1}{L}\left(a_1 + 2\, a_2 \cdot \xi\right)$$

$$\Phi = \frac{E \cdot A}{2 \cdot L} \cdot \left[\left(a_1\right)^2 + 2\, a_1 \cdot a_2 + \left(a_2\right)^2 \cdot \frac{4}{3}\right] - c \cdot L^2 \cdot \left(a_1 \cdot \frac{1}{3} + a_2 \cdot \frac{1}{4}\right) - P \cdot \left(a_1 + a_2\right)$$

Wartości stałych a_1 i a_2 wyliczamy z warunku minimum energii, otrzymując układ równań:

$$\frac{d}{da_1}\Phi = 0 \quad \text{--------->} \quad \frac{E \cdot A}{L} \cdot (a_1 + a_2) = P \cdot \left(\frac{2 \cdot \kappa}{3} + 1\right)$$

$$\frac{d}{da_2}\Phi = 0 \quad \text{--------->} \quad \frac{E \cdot A}{L} \cdot \left(a_1 + \frac{4}{3} a_2\right) = P \cdot \left(\frac{\kappa}{2} + 1\right)$$

Układ równań w postaci macierzowej: $M \cdot a = r$ *gdzie:*

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad r := \frac{P \cdot L}{E \cdot A} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \kappa}{3} + 1 \\ \frac{\kappa}{2} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23.333 \\ 18.000 \end{pmatrix} \cdot mm$$

$$|M| = 0.333$$

$$a := lsolve(M, r) \qquad a = \begin{pmatrix} 3.933 \\ -1.600 \end{pmatrix} \cdot cm$$

$$u(\xi) := a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2$$ *- rozwiązanie przybliżone*

$$v(\xi) := \frac{P \cdot L \cdot \xi}{E \cdot A} \cdot \left[1 + \kappa \cdot \left(1 - \frac{\xi^2}{3}\right)\right]$$ *- rozwiązanie dokładne*

$v(1) = 2.333 \cdot cm \qquad u(1) = 2.333 \cdot cm$