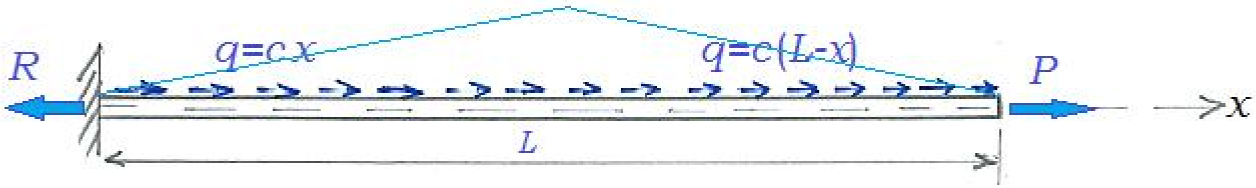
$ORIGIN := 1$

Metoda Rayleigha-Ritza wyznaczenia przybliżonego rozwiązania problemu pręta rozciąganego



$E := 10GPa$ *- moduł Younga*

$c := 10\frac{kN}{m^2}$ $P := 5kN$ $L := 4m$ $A := 10cm^2$ $\xi = \frac{x}{L}$ $\kappa := \frac{c\cdot L^2}{P} = 32$

$$R = P + \int_0^L q(x)\, dx \qquad R := P + c\cdot\int_0^{\frac{L}{2}} x\, dx + c\cdot\int_{\frac{L}{2}}^{L} (L-x)\, dx = 45\cdot kN$$

Energia odkształconego pręta w położeniu równowagi dąży do minimum

$$\Phi = \int \left(\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^T\cdot E\cdot\varepsilon\right) dV - \int_0^L c\cdot x\cdot u\, dx - P\cdot u(L)$$ ---------> minimum

$$\varepsilon_x = \frac{d}{dx}u$$

$$\Phi = \frac{E \cdot A}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{d}{dx} u\right)^2 dx - \int_0^L c \cdot x \cdot u \; dx - P \cdot u(L) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{E \cdot A}{2L} \cdot \int_0^1 \left(\frac{d}{d\xi} u\right)^2 d\xi - \int_0^1 L^2 \cdot c \cdot \xi \cdot u \; d\xi - P \cdot u(1)$$

Rozwiązania przybliżonego poszukujemy w postaci wielomianu, który spełnia warunki brzegowe:

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2 + a_3 \cdot \xi^3 \qquad u(0) = 0 \quad \text{--------->} \quad a_0 = 0$$

$$\frac{d}{dx} u = \frac{1}{L}\left(a_1 + 2\,a_2 \cdot \xi + 3 \cdot a_3 \cdot \xi^2\right)$$

$$\Phi = \frac{E \cdot A}{2 \cdot L} \cdot \left[\left(a_1\right)^2 + 2\,a_1 \cdot a_2 + 2\,a_1 \cdot a_3 + \frac{4}{3} \cdot \left(a_2\right)^2 + 3\,a_2 \cdot a_3 + \frac{9}{5} \cdot \left(a_3\right)^2\right] + \ldots$$

$$- \left[c \cdot L^2 \cdot \left(\frac{1}{8} a_1 + \frac{7}{96} a_2 + \frac{3}{64} a_3\right) - P \cdot \left(a_1 + a_2 + a_3\right)\right]$$

Wartości stałych a_1 , a_2 i a_3 wyliczamy z warunku minimum energii, otrzymując układ równań:

$$\frac{d}{da_1}\Phi = 0 \quad \text{--------->} \quad \frac{E \cdot A}{2L}\cdot\left(2a_1 + 2a_2 + 2a_3\right) = P\cdot\left(1 + \frac{\kappa}{8}\right)$$

$$\frac{d}{da_2}\Phi = 0 \quad \text{--------->} \quad \frac{E \cdot A}{2L}\cdot\left(2a_1 + \frac{8}{3}a_2 + 3a_3\right) = P\cdot\left(1 + \frac{7\kappa}{96}\right)$$

$$\frac{d}{da_3}\Phi = 0 \quad \text{--------->} \quad \frac{E \cdot A}{2L}\cdot\left(2a_1 + 3a_2 + \frac{18}{5}a_3\right) = P\cdot\left(1 + \frac{3\kappa}{64}\right)$$

Układ równań w postaci macierzowej: $M \cdot a = r$ *gdzie:*

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad r := \frac{P \cdot L}{E \cdot A}\cdot\begin{pmatrix} 1 + \frac{\kappa}{8} \\ 1 + \frac{7\kappa}{96} \\ 1 + \frac{3\kappa}{64} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 6.667 \\ 5.000 \end{pmatrix}\cdot mm$$

$$a := lsolve(M, r) \qquad a^T = (2.000 \quad -1.000 \quad 0.000) \cdot cm$$

$$u(\xi) := a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2 + a_3 \cdot \xi^3$$ *- rozwiązanie przybliżone* $$u\left(\frac{1}{2}\right) = 0.750 \cdot cm$$

$$v1(\xi) := \frac{P \cdot L \cdot \xi}{E \cdot A} \cdot \left[1 + \kappa \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{\xi^2}{6}\right)\right]$$ *- rozwiązanie dokładne w przedziale <0,1/2>*

$$v5 := v1(0.5) = 0.767\, cm$$

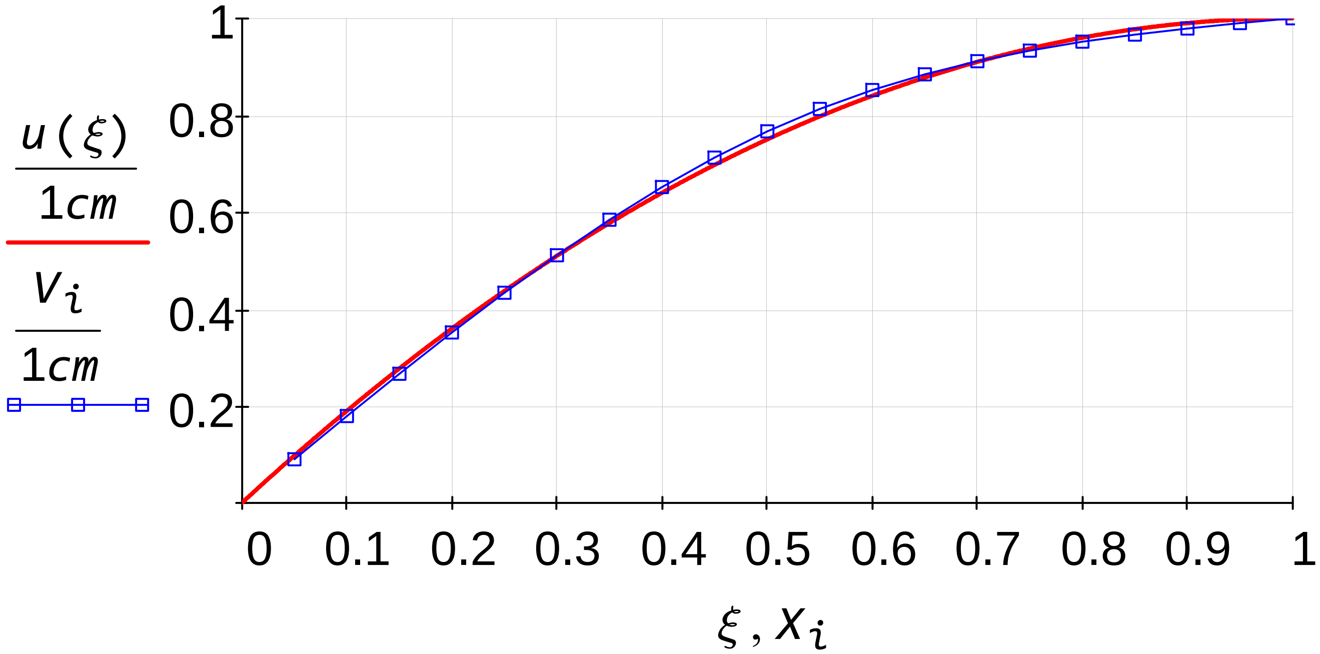
$$d := v5 - \frac{P \cdot L}{2E \cdot A} \cdot \left(1 + \frac{7\kappa}{24}\right) = -0.267\, cm$$

$$v2(\zeta) := \frac{P \cdot L \cdot \zeta}{E \cdot A} \cdot \left[1 + \frac{\kappa}{2} \cdot \left(1 - \zeta + \frac{\zeta^2}{3}\right)\right] + d$$ *- rozwiązanie dokładne w przedziale <1/2, 1>*

$$i := 1 .. 10 \qquad X_i := 0.05 \cdot i \qquad V_i := v1(X_i)$$

$$i := 11 .. 20 \qquad X_i := 0.05 \cdot i \qquad V_i := v2(X_i)$$

$i := 1 .. 20$



$\frac{u(\xi)}{1cm}$
$\frac{v_i}{1cm}$
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ξ, x_i