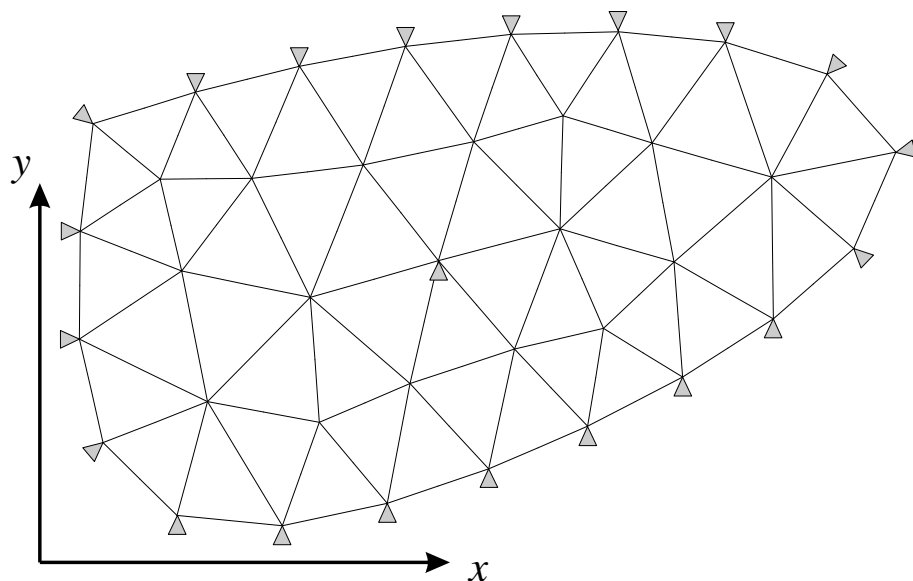


8 Metody numeryczne w zagadnieniach przepływów

8.1 Metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych (MRS) jest jedną z najprostszych metod numerycznego rozwiązywania zagadnień opisanych przez układy równań różniczkowych. Idea tej metody polega na zastąpieniu pochodnych występujących w tych równaniach przez odpowiednie ilorazy różnicowe. Pewne trudności w zastosowaniu tej metody wiążą się z warunkami brzegowymi oraz z nieregularnym kształtem brzegu.



Rys. 8.1 Siatka punktów węzłowych oraz warunki brzegowe

Na obszar, w którym spełnione ma być rozwiązywane równanie, nakładamy (najlepiej regularną) siatkę punktów węzłowych (rys. 8.1). Wartości poszukiwanej funkcji w węzłach siatki będą stanowiły zbiór niewiadomych. Należy teraz wyznaczyć odpowiednie do rzędu równania ilorazy różnicowe, które pozwolą przekształcić równanie różniczkowe na układ równań algebraicznych. Prostym sposobem na otrzymanie tych ilorazów jest zastosowanie rozwinięcia poszukiwanej funkcji w szereg Taylora wokół punktów węzłowych.

8.1.1 Funkcja jednej zmiennej

Rozwinięcie w szereg Taylora poszukiwanej funkcji $u(x)$ wokół punktu o współrzędnej x_i (rys. 8.2.), można zapisać w postaci:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta_x \frac{du}{dx} \Big|_i + \frac{\Delta_x^2}{2!} \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_i + \frac{\Delta_x^3}{3!} \frac{d^3u}{dx^3} \Big|_i + \frac{\Delta_x^4}{4!} \frac{d^4u}{dx^4} \Big|_i + \frac{\Delta_x^5}{5!} \frac{d^5u}{dx^5} \Big|_i + \dots \quad (8.1)$$

$$u_{i-1} = u_i - \Delta_x \frac{du}{dx} \Big|_i + \frac{\Delta_x^2}{2!} \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_i - \frac{\Delta_x^3}{3!} \frac{d^3u}{dx^3} \Big|_i + \frac{\Delta_x^4}{4!} \frac{d^4u}{dx^4} \Big|_i - \frac{\Delta_x^5}{5!} \frac{d^5u}{dx^5} \Big|_i + \dots \quad (8.2)$$

Przekształcając równania (8.1) i (8.2) otrzymamy:

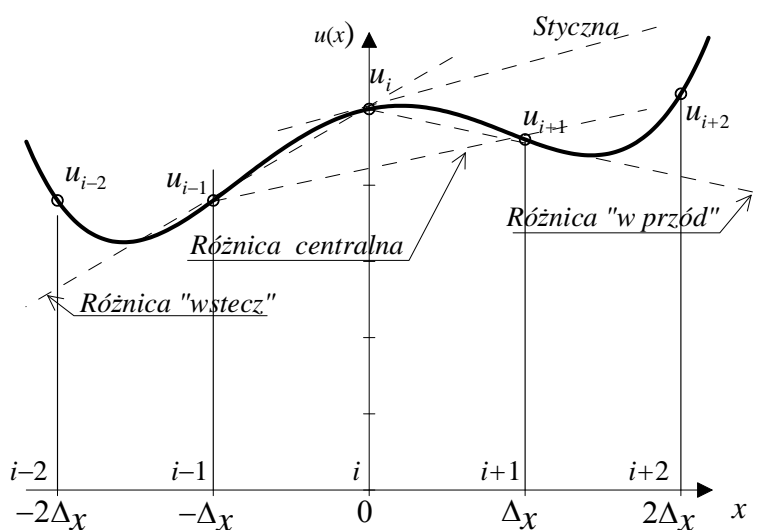
$$\frac{du}{dx}\Big|_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta_x} + O(\Delta_x) \quad \text{- iloraz różnicowy „w przód”} \quad (8.3)$$

$$\frac{du}{dx}\Big|_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta_x} + O(\Delta_x) \quad \text{- iloraz różnicowy „wstecz”} \quad (8.4)$$

a obliczając wartość średnią z (8.3) i (8.4) lub odejmując (8.2) od (8.1):

$$\frac{du}{dx}\Big|_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta_x} + O(\Delta_x^2) \quad \text{- „centralny” iloraz różnicowy,} \quad (8.5)$$

który charakteryzuje się mniejszym błędem. W równaniach tych Δ_x oznacza odległość między węzłami siatki w kierunku x , a $O(\Delta_x)$ oznacza resztę rzędu Δ_x , $O(\Delta_x^2)$ oznacza resztę rzędu Δ_x^2 , $\frac{du}{dx}\Big|_i$ oznacza wartość pochodnej obliczoną w punkcie o współrzędnej x_i

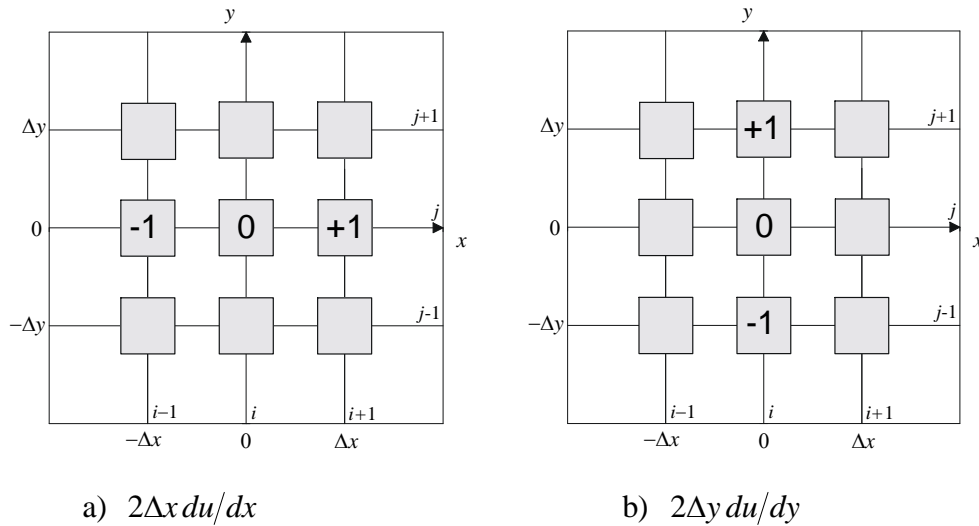


Rys 8.2 Aproksymacja funkcji $u(x)$ wielomianem II stopnia

Wynik ten można też otrzymać aproksymując poszukiwaną funkcję w przedziale $2\Delta_x$ wielomianem 2-go stopnia: $u(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (rys. 8.2). Stałe a_i należy wyznaczyć z warunków: $u(0) = u_i$, $u(-\Delta_x) = u_{i-1}$, $u(\Delta_x) = u_{i+1}$, co prowadzi do równania:

$$u(x) \approx (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \frac{x^2}{2\Delta_x^2} + (u_{i+1} - u_{i-1}) \frac{x}{2\Delta_x} + u_i, \quad (8.6)$$

które po zróżniczkowaniu względem x i obliczeniu pochodnej w punkcie „i”, ($x=0$) daje „centralny” iloraz różnicowy (8.5).



Rys. 8.3 Schematy różnicowe: du/dx (a) oraz du/dy (b)

Jak łatwo obliczyć, biorąc 5 początkowych wyrazów w szeregu Taylora (aż do członu zawierającego x^4), druga pochodna może być wyrażona wzorem różnicowym:

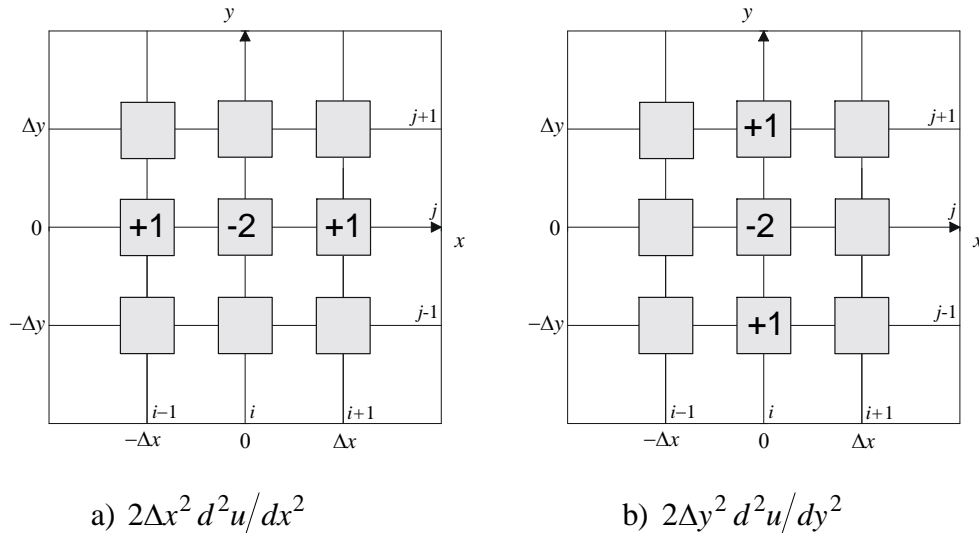
$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta_x^2} + O(\Delta_x^2). \quad (8.7)$$

Biorąc w rozwinięciu Taylora wyrazy aż do rzędu x^6 włącznie i wykonując uśrednienie, podobnie jak to zrobiliśmy w równaniu (8.6), otrzymujemy wyrażenia na różnice centralne:

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_i = \frac{-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2}}{12\Delta_x^2} + O(\Delta_x^4), \quad (8.8)$$

$$\left. \frac{d^3 u}{dx^3} \right|_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{2\Delta_x^3} + O(\Delta_x^2), \quad (8.9)$$

$$\left. \frac{d^4 u}{dx^4} \right|_i = \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta_x^4} + O(\Delta_x^2). \quad (8.10)$$



Rys. 8.4 Schematy różnicowe: d^2u/dx^2 (a) i d^2u/dy^2 (b)

8.1.2 Przypadek funkcji dwu zmiennych

Analogicznie do różnic w przypadku jednowymiarowym, oznaczając symbolem i kolejność przyrostów Δx w kierunku osi x , oraz j kolejność przyrostów Δy w kierunku osi y , zapiszemy odpowiednie różnice skończone:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (8.11)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2), \quad (8.12)$$

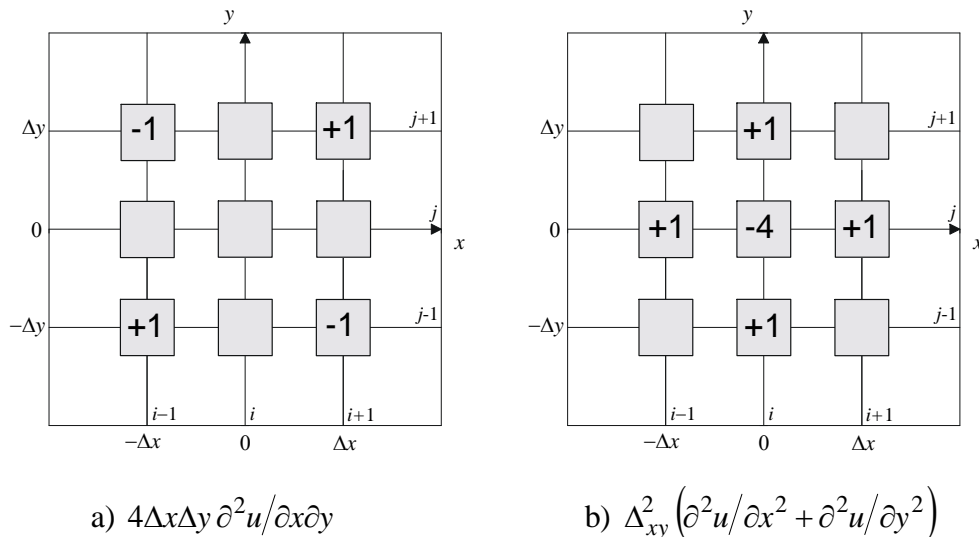
$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad (8.13)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2). \quad (8.14)$$

Pochodne mieszane zastąpić można różnicami obliczonymi przez złożenie formuł (8.11) oraz (8.12) co daje:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (8.15)$$

Ilorazy różnicowe wygodnie też można przedstawić przy pomocy schematów graficznych. Schematy odpowiadające równaniom (8.11)...(8.15) przedstawione zostały na rysunkach: 8.3, 8.4, 8.5.

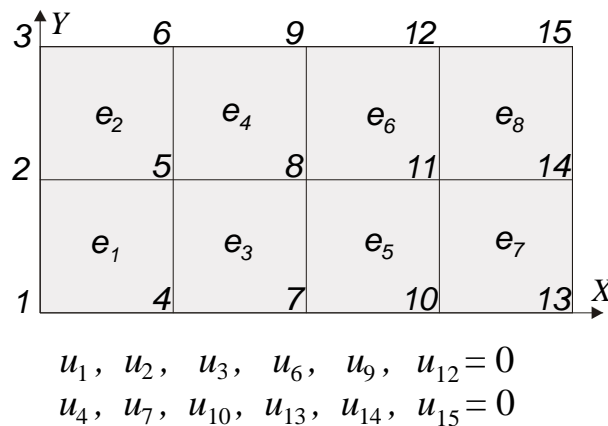


Rys. 8.5 Schematy różnicowe $\partial^2 u / \partial x \partial y$ (a) oraz $\nabla^2 u$ przy $\Delta x = \Delta y = \Delta_{xy}$ (b)

Zastosowanie szeregów Taylora do wyznaczania ilorazów różnicowych wyższych rzędów omówione jest szczegółowo w obszernej monografii T. J. Chunga [2002]. Zastosowanie siatek nieregularnych omawia J. Orkisz w trzeciej części monografii (Kleiber i in. [1995]). Operatory różnicowe wyższych rzędów, stosowane przy rozwiązywaniu równań teorii płyt i metody uwzględnienia warunków brzegowych podane są obszernie w monografii Z. Kączkowskiego [1980].

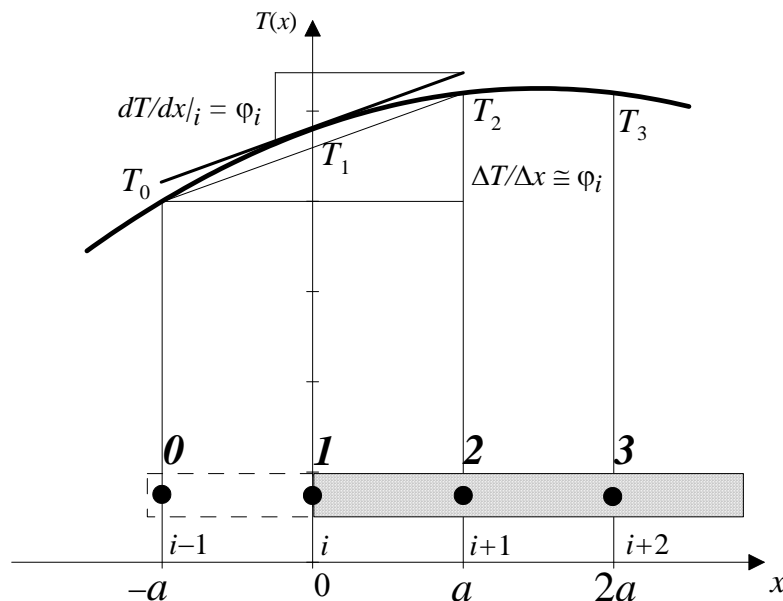
8.1.3 Uwzględnianie warunków brzegowych

Równania rzędu pierwszego, gdzie jedynymi warunkami brzegowymi są wartości poszukiwanej funkcji w brzegowych węzłach siatki (warunki Dirichleta), nie nastroją żadnych kłopotów przy zestawianiu układu równań MRS. Jeżeli ograniczyć rozważania do równań różniczkowych rzędu pierwszego i drugiego, to jak widać na rysunkach: 8.3, 8.4, 8.5, operatory różnicowe zawierają tylko wartości funkcji w węzłach bezpośrednio sąsiadujących z węzłem, dla którego zapisujemy operator. Ponieważ wartości funkcji w punktach brzegowych są w warunkach Dirichleta zadane, to nie musimy dla tych punktów zapisywać równań różnicowych, pozostają tylko punkty wewnętrzne obszaru (rys. 8.6). Zatem utworzony układ równań nie będzie zawierał żadnych wartości funkcji w punktach leżących poza obszarem rozwiązania.



Rys. 8.6 Obszar prostokątny $2a \times 4a$ oraz warunki brzegowe Dirichleta

Problemy powstają w przypadku równań wyższych rzędów gdzie operatory różnicowe zawierają wartości funkcji nie tylko w węzłach sąsiednich ale też odległych o $2\Delta_x$ i dalej od węzła środkowego (por. Kączkowski [1980]). Innej natury, lecz podobne w skutkach problemy powstają gdy w węzłach brzegowych określone są pochodne funkcji (warunki Neumanna). Iloraz różnicowy pierwszego rzędu (równanie 8.5) zapisany dla punktu brzegowego, wprowadzi zatem do układu równań wartość funkcji w węźle leżącym poza obszarem rozwiązania (rys. 8.7). Wartości te należy wyliczyć na podstawie pochodnej zadanej w punkcie brzegowym.



Rys. 8.7 Warunki brzegowe Neumanna

W celu ilustracji tego przypadku posłużymy się przykładem równania: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, które opisuje jednowymiarowy, ustalony przepływ ciepła. Jest zatem szczególnym przypadkiem równania Fouriera (8.26), opisanego w następnym punkcie. Równanie to może mieć warunki brzegowe Neumanna, gdy na brzegu zadany jest gradient temperatury rysunek 8.7 pokazuje brzeg obszaru wraz z węzłami siatki, gdzie w punkcie „1” powinien być spełniony warunek:

$\frac{\partial T}{\partial x} = \varphi$, który po uwzględnieniu (8.5), prowadzi do równania:

$$T_2 - T_0 = 2 a \varphi, \quad (8.16)$$

gdzie a oznacza odległość między węzłami siatki MRS, $\Delta_x = a$.

Po zapisaniu operatora różnicowego (8.7) równania Fouriera:

$$T_0 - 2T_1 + T_2 = 0 \quad (8.17)$$

możemy dzięki (8.16) wyeliminować niewiadomą u_4 z równania (8.17), które przybiera teraz postać:

$$(1 - a \varphi) T_2 - T_1 = 0, \quad (8.18)$$

zawierającą tylko niewiadome wartości funkcji w punktach należących do obszaru rozwiązania.

W równaniach różniczkowych wyższych rzędów, warunki brzegowe mogą zawierać także zadane wartości pochodnych wyższego rzędu, co prowadzi do bardziej złożonych związków umożliwiających redukcję niewiadomych w punktach nie należących do interesującego nas obszaru, np. w równaniach statyki płyt, gdzie występują równania rzędu 4, warunek na brzegu swobodnym zawiera pochodne rzędu 2 oraz 3.

8.1.4 Przykład zastosowania do rozwiązywania równań eliptycznych

Przykładem zastosowania metody różnic skończonych do rozwiązania problemów opisanych eliptycznymi równaniami różniczkowymi może być równanie Poissona. Równanie to opisuje wiele ważnych problemów fizyki, z których najprostszymi są (por. Babicz i in. [1970]):

- problem stacjonarnego rozkładu temperatury w ciele izotropowym (por. Wiśniewski [1979]),
- ustalony przepływ cieczy nieściśliwej w obszarze zawierającym źródła i upusty,
- potencjał pola elektrostatycznego w obszarze zawierającym ładunki (por. Landau, Lifszyc [1979]),
- newtonowski potencjał pola grawitacyjnego w obszarze zawierającym masy,
- zagadnienie skręcania pryzmatycznego pręta (por. Timoshenko, Goodier [1962]),
- zagadnienie statycznej deformacji membrany poddanej działaniu ciśnienia i rozciągania.

Rozwiązanie tego ważnego równania kilkoma metodami numerycznymi będzie opisane także w następnych punktach tego rozdziału.

• **Równanie Poissona**

Rozwiążemy równanie Poissona:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -p(x, y), \quad (8.19)$$

z warunkami $u(x, y) = 0$ na brzegu obszaru pokazanego na rys. 8.6. Równanie to, opisuje np. odkształconą, w wyniku działania ciśnienia, powierzchnię cienkiej błony napiętej siłami leżącymi w płaszczyźnie membrany. Funkcja $p(x, y)$ wyraża stosunek ciśnienia do napięcia.

Występujący w równaniu (8.19) operator Laplace'a: $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, po zastosowaniu równań (8.13) i (8.14) można wyrazić za pomocą formuły:

$$\nabla^2 u = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta_y^2} + O(\Delta_x^2, \Delta_y^2), \quad (8.20)$$

lub przy założeniu siatki kwadratowej ($\Delta_x = \Delta_y$):

$$\nabla^2 u = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{\Delta_x^2} + O(\Delta_x^2, \Delta_y^2). \quad (8.21)$$

Schemat graficzny tego równania przedstawiony jest na rys. 8.5.

Przyjmując siatkę kwadratową o boku a , nałożoną na obszar pokazany na rys. 8.6, rozwiążemy równania Poissona $\nabla^2 u = -p_0$, gdzie $p_0 = \text{const.}$, z warunkami $u(x,y) = 0$ na brzegu. Po zastosowaniu operatora (8.21) otrzymamy układ równań:

$$\text{węzeł Nr 5: } u_2 + u_4 + u_6 + u_8 - 4u_5 = -a^2 p_0, \quad (8.22)$$

$$\text{węzeł Nr 8: } u_5 + u_7 + u_9 + u_{11} - 4u_8 = -a^2 p_0, \quad (8.23)$$

$$\text{węzeł Nr 11: } u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} - 4u_{11} = -a^2 p_0. \quad (8.24)$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych : $u_2 = 0, u_4 = 0, u_6 = 0, u_7 = 0, u_9 = 0, u_{10} = 0, u_{12} = 0, u_{14} = 0$, układ redukuje się do trzech równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_5 \\ u_8 \\ u_{11} \end{bmatrix} = a^2 p_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (8.25)$$

których rozwiązaniem jest : $u_5 = u_{11} = 0,35714 a^2 p_0, u_8 = 0,42857 a^2 p_0$. Dokładnym rozwiązaniem tego zadania jest funkcja (por. Timoshenko, Goodier [1962]):

$$u(x, y) = \frac{4L_x^2 p_0}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^3} \left[1 - \frac{\text{ch}(k\pi\zeta)}{\text{ch}(k\pi\lambda)} \right] \cos(k\pi\xi), \quad \text{gdzie } \lambda = \frac{L_y}{2L_x}, \quad \xi = \frac{x}{L_x}, \quad \zeta = \frac{y}{L_x},$$

L_x jest długością a L_y szerokością obszaru (rys. 8.6).

Przyjmując $L_x=4a, L_y=2a, x=0, y=0$ otrzymamy $\lambda=0,25$ oraz formułę umożliwiającą obliczenie wartości funkcji w punkcie środkowym:

$$u_8 = u(0,0) = 2a^2 p_0 \left[1 - \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^3 \text{ch}(k\pi\lambda)} \right],$$

która po zsumowaniu dwudziestu pierwszych wyrazów szeregu daje $u_8 = 0,45549 a^2 p_0$. Błąd sumy dwudziestu wyrazów jest mniejszy niż $1,73327 \cdot 10^{-18}$, wynik ten można więc uznać za dokładny. Błąd rozwiązania (8.25) jest więc równy $-5,91\%$, co przy tak rzadkiej siatce dyskretyzacyjnej jest wielkością bardzo małą.

8.1.5 Przykład zastosowania do rozwiązywania równań parabolicznych

Przykładem różniczkowego równania parabolicznego jest równanie Fouriera lub równanie dyfuzji. Na przykładzie tych równań pokażemy najczęściej stosowane metody ich rozwiązywania za pomocą MRS.

- **Równanie Fouriera - nieustalony przepływ ciepła**

Rozpatrzmy teraz różne metody rozwiązywania zagadnień nieustalonych na prostym przykładzie jednowymiarowego ciała o stałym współczynniku przewodnictwa cieplnego, bez wewnętrznych źródeł (por. Wisniewski [1979]).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (8.26)$$

gdzie $T(x,t)$ jest temperaturą ciała, t – oznacza czas, x – współrzędną przestrzenną a współczynnik α zależy od stałych materiałowych.

Analogiczne równanie różniczkowe opisuje jednowymiarowy problem dyfuzji.

Metody FTCS i Bindera-Schmidta

Zamieniając pochodną względem czasu na iloraz różnicowy obliczony zgodnie z równaniem (8.3) a pochodną przestrzenną zastępując „centralnym” ilorazem obliczonym zgodnie z (8.13) otrzymamy w „ i -tym” węźle siatki :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta_t} = \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta_x^2}, \quad (8.27)$$

a po przekształceniu:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \delta(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n), \quad (8.28)$$

gdzie Δ_t oznacza przyrost czasu, Δ_x przyrost współrzędnej x , współczynnik $\delta = \alpha \Delta_t / \Delta_x^2$ nazywany jest liczbą Fouriera (Fo) - w równaniach opisujących przepływ ciepła, lub liczbą dyfuzji - w równaniach opisujących problem dyfuzji. Indeksy górne oznaczają numer kroku czasowego a indeksy dolne numer węzła siatki przestrzennej.

Otrzymany sposób całkowania równania przewodnictwa cieplnego (lub dyfuzji) nazywany jest metodą jawną (w literaturze angielskojęzycznej - explicit scheme), gdyż pozwala wyznaczyć wartość węzłową poszukiwanej funkcji w następnej chwili na podstawie wartości aktualnych.

Metoda ta jest numerycznie stabilna dla $0 \leq \delta \leq 0,5$ (por. Chung [2002]). Nazywana jest metodą FTCS (Forward-Time, Central-Space) ze względu na rodzaj ilorazów różnicowych użytych do dyskretyzacji czasowej i przestrzennej. Dla szczególnej wartości liczby Fouriera $\delta = \text{Fo} = 0,5$ otrzymujemy równania metody Bindera-Schmidta:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{1}{2}(T_{i+1}^n + T_{i-1}^n). \quad (8.29)$$

Stabilność numeryczna oznacza, że błąd generowany w kolejnych iteracjach nie rośnie, tzn. $\varepsilon^{n+1}/\varepsilon^n \leq 1$, gdzie ε^n jest miarą błędu n -tej iteracji. Błąd iteracji jest funkcją kroku czasowego Δt i rozmiaru siatki dyskretyzacyjnej Δx .

Metoda Richardsona

Biorąc „centralny” iloraz różnicowy zamiast pochodnej czasowej otrzymujemy inną jawną metodę rozwiązywania równania przewodnictwa cieplnego:

$$T_i^{n+1} = T_i^{n-1} + 2\delta(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n), \quad (8.30)$$

znaną jako metoda Richardsona. Metoda ta jest bezwarunkowo niestabilna (por. Chung [2002]), a więc zawsze prowadzi do rozbieżnych iteracji, nie można jej więc zastosować w analizach numerycznych.

Metoda Duforda-Frankela

Po podstawieniu w równaniu (8.30) zamiast T_i^n , uśrednionej wartości: $\frac{1}{2}(T_i^{n+1} + T_i^{n-1})$, uzyskujemy stabilny algorytm całkowania równania (8.26) znany pod nazwą metody Duforda-Frankela:

$$(1 + 2\delta)T_i^{n+1} = (1 - 2\delta)T_i^{n-1} + 2\delta(T_{i+1}^n + T_{i-1}^n), \quad (8.31)$$

która jest bezwarunkowo stabilna numerycznie, tzn. zawsze prowadzi do zbieżnych iteracji.

Metoda Laasonena

Biorąc w równaniu (8.28) prawą stronę w chwili „ $n+1$ ” otrzymamy schemat całkowania równania Fouriera znany pod nazwą metody Laasonena:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \delta(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}). \quad (8.32)$$

Metoda ta jest bezwarunkowo stabilna, należy ona do tzw. schematów uwikłanych (implicit), które wymagają większego nakładu czasu obliczeń gdyż macierz układu równań przestaje być macierzą diagonalną, jak to ma miejsce w metodach jawnych (explicit), a staje się macierzą trójdzielną.

Metoda Cranka-Nicolsona

Uśredniając prawe strony równań (8.28) i (8.32) otrzymamy metodę Cranka-Nicolsona:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{1}{2}\delta(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n), \quad (8.33)$$

bezwarunkowo stabilną numerycznie. Ponieważ równanie (8.33) zawiera część jawną, ułatwiającą iteracyjne rozwiązanie układu równań, metoda Cranka-Nicolsona jest bardzo często stosowana.

Uogólniając tą metodę biorąc liniową kombinację prawych stron (8.28) i (8.32) otrzymujemy tzw. metodę β , która zawiera metody FTCS, Laasonena i Cranka-Nicolsona jako szczególne przypadki:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \delta \left[\beta (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) + (1 - \beta) (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \right]. \quad (8.34)$$

Wartości współczynnika β z przedziału $(0,5 \leq \beta \leq 1)$ dają bezwarunkową stabilność numeryczną metody.

8.1.6 Przykład zastosowania do rozwiązywania równań hiperbolicznych

Sposoby rozwiązywania równań różniczkowych typu hiperbolicznego omówimy na prostym przykładzie równania Eulera, które nazywane jest też równaniem transportu lub napływu (adwekcji) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (8.35)$$

gdzie $\alpha > 0$, jest stałą o wymiarze prędkości.

Metody rozwiązania tego równania (analogicznie jak to miało miejsce w przypadku równania parabolicznego) różnić się będą rodzajami ilorazów różnicowych, którymi zastępowane będą pochodne cząstkowe występujące w (8.35). Zastosowanie różnic „w przód”, które są opisane równaniem (8.3) do obu pochodnych daje schemat całkowania nazywany FTFS (Forward Time, Forward Space). Ten schemat całkowania równania Eulera prowadzi do następujących zależności:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \gamma (u_{i+1}^n - u_i^n), \quad (8.36)$$

gdzie $\gamma = \alpha \Delta_t / \Delta_x$ jest liczbą Couranta, oznaczaną też symbolem Co lub CFL (Courant, Friedrichs, Lewy). Schemat ten jest schematem jawnym (explicit), gdyż poza poszukiwaną wartością u_i^{n+1} w równaniu występują tylko wartości węzłowe obliczone w aktualnym kroku czasowym (n), macierz układu równań jest więc macierzą diagonalną. Metoda jest bezwarunkowo niestabilna numerycznie.

Zastosowanie „centralnej” różnicy do aproksymacji pochodnej przestrzennej daje schemat FTCS (Forward Time, Central Space):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \gamma (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad (8.37)$$

który jest również bezwarunkowo niestabilny numerycznie.

Różnica „wstecz” aproksymująca pochodną przestrzenną w połączeniu z różnicą „w przód” daje schemat FTBS (Forward Time, Backward Space):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \gamma(u_i^n - u_{i-1}^n), \quad (8.38)$$

stabilny warunkowo.

Jeżeli w schemacie FTCS (8.37) użyjemy uśrednionej przestrzennie wartości u_i^n , to otrzymamy schemat Laxa:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{1}{2}\gamma(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad (8.39)$$

który jest stabilny numerycznie dla $\gamma \leq 1$.

Centralne różnice aproksymujące obie pochodne dają schemat CTCS, znany jako metoda „żabiego skoku” (leapfrog). Źródłem tej nazwy jest zapewne fakt pominięcia (przeskoczenia) węzła „ i ” przestrzennej siatki MRS:

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \gamma(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n). \quad (8.40)$$

Schemat leapfrog jest stabilny numerycznie dla $\gamma \leq 1$, oraz ma większą dokładność $O(\Delta_t^2, \Delta_x^2)$ niż poprzednio opisywane schematy, które charakteryzowały się resztą rzędu pierwszego: $O(\Delta_t, \Delta_x)$. Wadą metody leapfrog, jest dodatkowy warunek początkowy dla chwili $-\Delta t$, który może spowodować błędy lub niejednoznaczność rozwiązania.

Opisane powyżej metody należą do grupy schematów jawnych (explicit), można tu także podobnie jak w schematach rozwiązywania równań parabolicznych zastosować schematy uwikłane (implicit), które dają reszty wyższych rzędów niż schematy jawne.

Jeżeli prawą stronę równania (8.37) przedstawimy w kroku czasowym $n+1$, otrzymujemy uwikłaną metodę FTCS, o reszcie rzędu $O(\Delta_t, \Delta_x^2)$. Zapisując nieznanne wartości węzłowe funkcji u w kroku czasowym $n+1$ po lewej stronie równania otrzymamy:

$$\gamma u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} - \gamma u_{i+1}^{n+1} = -2u_i^n. \quad (8.41)$$

Podstawiając zamiast prawej strony równania (8.37) jej uśrednienie czasowe: $u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^{n+1} + u^n)$, otrzymujemy metodę Cranka-Nicolsona:

$$\gamma u_{i-1}^{n+1} - 4u_i^{n+1} - \gamma u_{i+1}^{n+1} = -\gamma u_{i-1}^n - 4u_i^n + \gamma u_{i-1}^n. \quad (8.42)$$

Porównanie wyników otrzymywanych za pomocą tych schematów całkowania oraz informacje o innych metodach (metody typu *predictor-corrector* lub wielopunktowe) znaleźć można w obszernej monografii „Computer Fluid Dynamics”, T. J. Chunga oraz „Computational Methods for Fluid Dynamics”, Ferziger i Perića.

8.1.7 Przykład zastosowania metod wielopunktowych

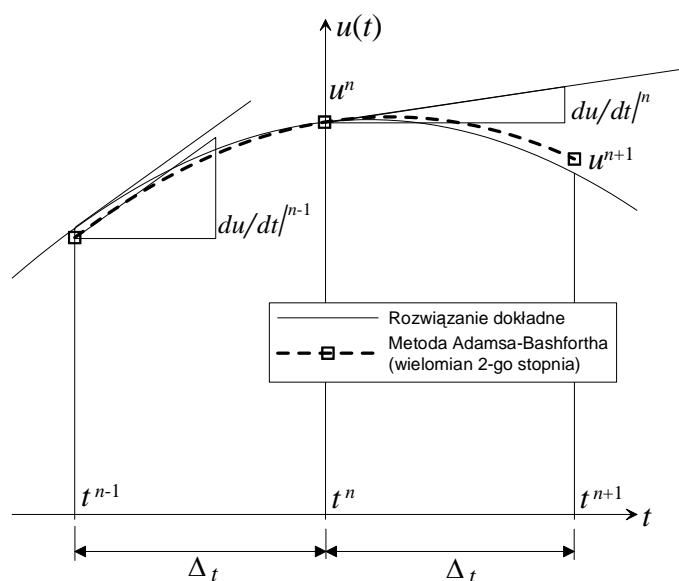
Metody wielopunktowe polegają na aproksymacji poszukiwanej funkcji wielomianem zawierającym przyrosty Δt wyższego stopnia. Z tych metod omówimy dwie często stosowane: metody Adamsa-Bashfortha i metody Rungego-Kutty.

Zapiszemy dowolne równanie różniczkowe zawierające pochodne pierwszego rzędu względem czasu w następujący sposób:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(t, u). \quad (8.43)$$

Aproksymując funkcję u wielomianem drugiego stopnia względem t i dobierając tak współczynniki wielomianu aby uzyskać zgodność pochodnych w punktach czasowych t oraz $t-\Delta_t$ (rys. 8.8) otrzymamy metodę Adamsa-Bashfortha drugiego rzędu:

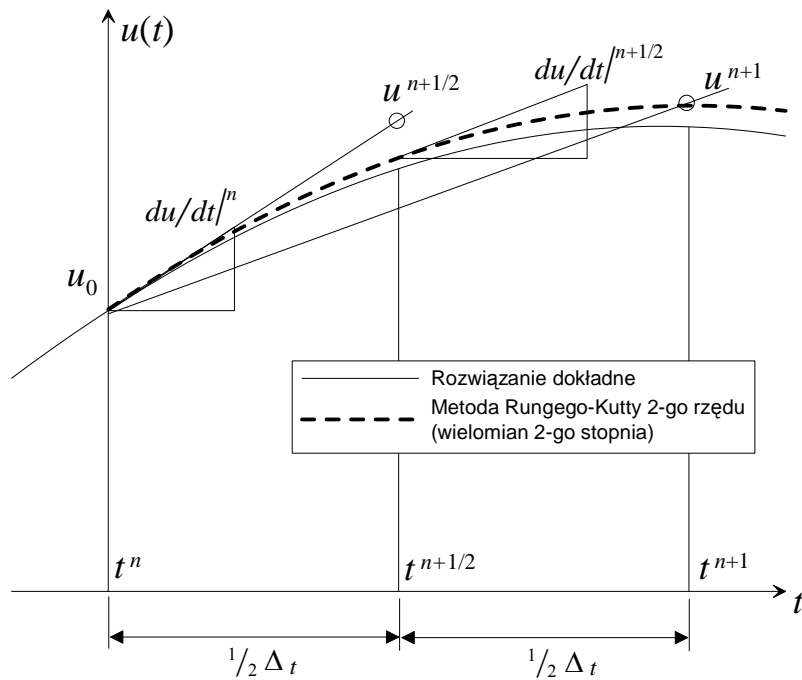
$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta_t}{2} [3f(t^n, u^n) - f(t^{n-1}, u^{n-1})]. \quad (8.44)$$



Rys. 8.8 Metoda Adamsa-Bashfortha 2-go rzędu

Metoda Rungego-Kutty drugiego rzędu posługuje się przewidywaną wartością funkcji u w połowie kroku czasowego $u^{n+\frac{1}{2}}$ (rys. 8.9) a następnie na jej podstawie wyznacza wartość funkcji w kolejnym kroku czasowym:

$$\begin{aligned} u^{n+\frac{1}{2}} &= u^n + \frac{\Delta_t}{2} f(t^n, u^n), \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta_t f(t^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (8.45)$$



Rys. 8.9 Metoda Rungego-Kutty 2-go rzędu

Metoda drugiego rzędu jest metodą samostartującą tzn. nie wymaga żadnych dodatkowych warunków początkowych. Najczęściej stosowana jest metoda czwartego rzędu, którą zapisać można następująco:

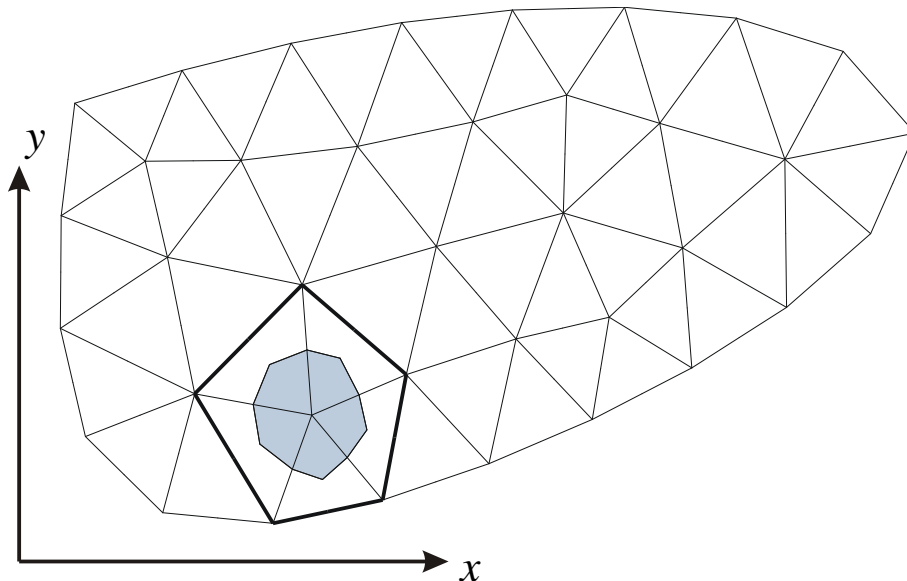
$$\begin{aligned}
 f^n &= f(t^n, u), \\
 u^{(1)} &= u^n + \frac{\Delta t}{2} f^n, \quad f^{(1)} = f(t^{n+\frac{1}{2}}, u^{(1)}), \\
 u^{(2)} &= u^n + \frac{\Delta t}{2} f^{(1)}, \quad f^{(2)} = f(t^{n+\frac{1}{2}}, u^{(2)}), \\
 u^{(3)} &= u^n + \Delta t f^{(2)}, \quad f^{(3)} = f(t^n, u^{(3)}), \\
 u^{n+1} &= u^n + \frac{\Delta t}{6} [f^n + 2f^{(1)} + 2f^{(2)} + f^{(3)}].
 \end{aligned}
 \tag{8.46}$$

Metody Rungego-Kutty dają dokładność większą niż metody Adamsa-Bashfortha i inne wielopunktowe metody tego samego rzędu, są jednak bardziej czasochłonne gdyż wymagają m -krotnego (przy m -tym rzędzie metody), wyliczania wartości pochodnych na każdym kroku czasowym.

8.2 Metody objętości skończonych

Metody objętości skończonych lub objętości kontrolnych (obszarów kontrolnych) zostały zbudowane na zasadzie osłabienia warunków opisanych rozwiązywanym równaniem różniczkowym. Zamiast spełnienia warunku w dowolnym punkcie obszaru, żądamy aby został on spełniony w sposób całkowity w małym obszarze kontrolnym. Duża dowolność kształtowania tych obszarów kontrolnych powoduje łatwość generowania odpowiednich równań wyznaczających wartości węzłowe poszukiwanej funkcji. Z tego powodu metody

objętości skończonych wyparły w większości zastosowań praktycznych zaprezentowaną w poprzednim punkcie metodę różnic skończonych.



Rys. 8.10 Obszar kontrolny zbudowany wokół węzła siatki 2D

Ze względu na sposób wybierania obszaru kontrolnego metody objętości skończonych można wyróżnić dwa podejścia:

- obszar kontrolny zbudowany jest wokół węzła siatki (rys. 8.10),
- obszar kontrolny równoważny jest komórce siatki (rys. 8.13).

W pierwszym przypadku niewiadomymi będą wartości funkcji w węzłach siatki a obszar kontrolny zbudowany jest przez połączenie krawędziami środków komórek o wspólnym węźle, jak na rys. 8.10, lub przez utworzenie innej, podrzędnej siatki rozdzielającej obszary kontrolne poszczególnych węzłów. Podejście drugie powoduje, że niewiadomymi są wartości funkcji w punktach środkowych (najczęściej są to środki ciężkości) komórek – rys. 8.13, 8.14. Wyznaczanie wartości pośrednich, leżących między węzłami siatki odbywa się tu zwykle metodą interpolacji liniowej lub przez uśrednienie sąsiednich wartości. Możliwe jest jednak jawne wprowadzenie dowolnej funkcji interpolacyjnej analogicznie jak ma to miejsce w Metodzie Elementów Skończonych (p. 8.3), co nazywane jest zwykle metodą hybrydową.

Zastosowanie metody pokazane zostanie na przykładzie rozwiązania równania Poissona w obszarze 2D. Rozwiązanie innych rodzajów równań, w szczególności opisujących procesy nieustalone (zależne od czasu) odbywa się według schematów analogicznych jak opisane w p. 8.1.5 i 8.1.6.

8.2.1 Obszar kontrolny zbudowany wokół węzła siatki

Jako przykład ilustrujący zastosowanie metody objętości skończonych (kontrolnych) wybierzemy rozwiązanie dobrze znanego równania Poissona (8.19), które teraz zapiszemy w nieco innej postaci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p(x, y) = 0. \quad (8.47)$$

Całkując to równanie w obszarze kontrolnym Ω , otrzymamy:

$$\int_{\Omega} [u_{,xx} + u_{,yy} + p(x, y)] d\Omega = 0, \quad (8.48)$$

gdzie oznaczono $u_{,xx} = \partial^2 u / \partial x^2$, $u_{,yy} = \partial^2 u / \partial y^2$.

Stosując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego można wyrazić całkę powierzchniową (lub objętościową gdy rozwiązujemy zadanie 3D) w obszarze Ω przez całkę obliczoną na konturze (lub powierzchni) obszaru:

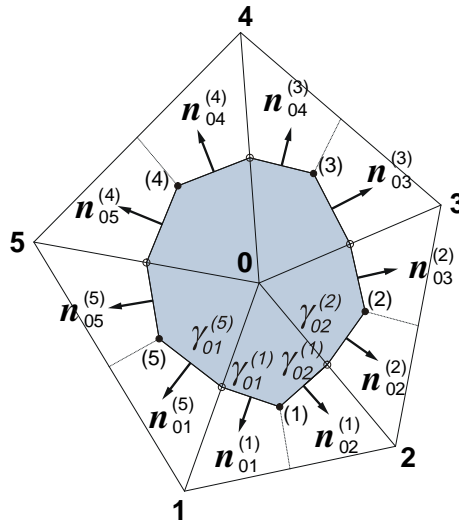
$$\int_{\Gamma} (u_{,x} n_x + u_{,y} n_y) d\Gamma + \int_{\Omega} p(x, y) d\Omega = 0, \quad (8.49)$$

gdzie Γ oznacza brzeg obszaru, a n_x i n_y są składowymi wektora normalnego do tego brzegu. Wyrażając pierwszą całkę przy pomocy sumy oraz zastępując pochodne ilorazami różnicowymi otrzymamy:

$$\sum_{\Gamma} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} n_x + \frac{\Delta u}{\Delta y} n_y \right] \Delta\Gamma + \int_{\Omega} p(x, y) d\Omega = 0, \quad (8.50)$$

gdzie \sum_{Γ} oznacza sumowanie różnic skończonych na wszystkich odcinkach brzegu obszaru. Drugą całkę można obliczyć dowolną metodą numeryczną np. stosując kwadraturę Gaussa. Wyrażając ją w najprostszej postaci mamy:

$$\int_{\Omega} p(x, y) d\Omega = \bar{p} \Omega, \quad \text{gdzie } \bar{p} \text{ oznacza średnią wartość } p(x, y) \text{ w obszarze } \Omega.$$



Rys. 8.11 Obszar kontrolny w postaci 10-cio boku

Na rys. 8.11 przedstawiony jest obszar kontrolny w postaci dziesięcioboku otaczającego węzeł „0”. Zakładając, że składowa normalna wektora gradientu: du/dn jest stała na obu odcinkach brzegu $\gamma_{0i}^{(a)}$, $\gamma_{0i}^{(b)}$, sąsiadujących krawędzią „0- i ”, otrzymamy:

$$\sum_{\Gamma} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} n_x + \frac{\Delta u}{\Delta y} n_y \right] \Delta \Gamma = \sum_{i=1}^N (u_i - u_0) \gamma_{0i}, \quad (8.51)$$

gdzie:

$$\gamma_{0i} = \frac{\Delta y_{0i}^{(a)} + \Delta y_{0i}^{(b)}}{x_i - x_0} - \frac{\Delta x_{0i}^{(a)} + \Delta x_{0i}^{(b)}}{y_i - y_0}. \quad (8.52)$$

W równaniu tym wyeliminowane zostały składowe normalnej dzięki związkom:

$$\Delta y_{0i}^{(a)} = \Delta \Gamma_{0i}^{(a)} n_x, \quad \Delta x_{0i}^{(a)} = -\Delta \Gamma_{0i}^{(a)} n_y, \quad \Delta x_{0i}^{(a)} = \frac{1}{2}(x_i + x_0) - x_a, \quad \Delta y_{0i}^{(a)} = \frac{1}{2}(y_i + y_0) - y_a,$$

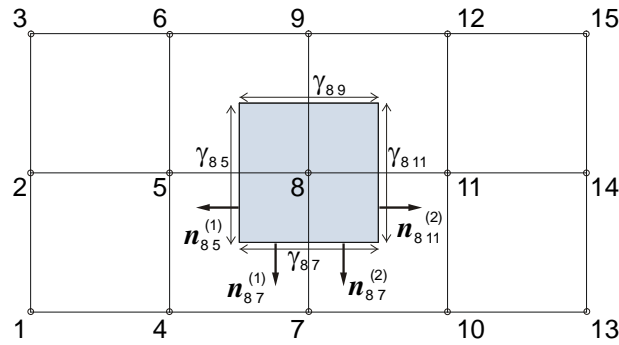
$$\Delta y_{0i}^{(b)} = \Delta \Gamma_{0i}^{(b)} n_x, \quad \Delta x_{0i}^{(b)} = -\Delta \Gamma_{0i}^{(b)} n_y, \quad \Delta x_{0i}^{(b)} = x_b - \frac{1}{2}(x_i + x_0), \quad \Delta y_{0i}^{(b)} = y_b - \frac{1}{2}(y_i + y_0).$$

Symbolem N oznaczono liczbę krawędzi siatki przechodzących przez węzeł „0” ($N=5$ dla przypadku przedstawionego na rys. 8.11), indeks a oznacza wierzchołek obszaru kontrolnego leżący w części poprzedzającej krawędź „0- i ”, a b wierzchołek w części następnej.

Rozwiązując zadanie identyczne z opisanym w punkcie 8.1.4 otrzymamy zgodnie z oznaczeniami podanymi na rysunku 8.12 :

$$\begin{aligned} \Omega &= a^2, & \bar{p} &= p_0 \\ \gamma_{87} &= 0 - \frac{a/2 + a/2}{-a} = 1, & \gamma_{89} &= 0 - \frac{-a/2 - a/2}{a} = 1, \\ \gamma_{811} &= \frac{a/2 + a/2}{a} - 0 = 1, & \gamma_{85} &= \frac{-a/2 - a/2}{-a} - 0 = 1, \end{aligned}$$

gdzie zerowymi wartościami zastąpione zostały ilorazy typu 0/0 co odpowiada znikaniu iloczynu skalarnego wektora gradientu i wektora normalnego.



Rys. 8.12 Kwadratowy obszar kontrolny węzła Nr 8

Zapisując teraz równanie (8.50) dla obszaru zbudowanego wokół węzła Nr 8 otrzymamy po uwzględnieniu związków (8.51 i 8.52) równanie:

$$(u_7 - u_8) \gamma_{8,7} + (u_{11} - u_8) \gamma_{8,11} + (u_9 - u_8) \gamma_{8,9} + (u_5 - u_8) \gamma_{8,5} = -a^2 p_0, \quad (8.53)$$

które po uporządkowaniu przyjmie postać:

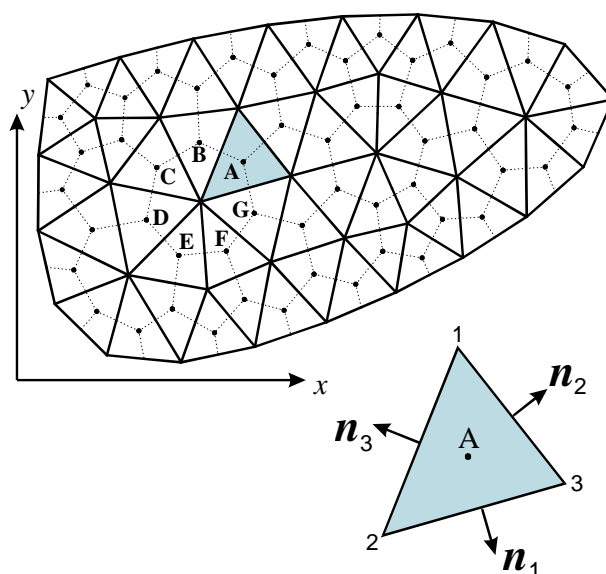
$$u_5 + u_7 + u_9 + u_{11} - 4u_8 = -a^2 p_0, \quad (8.54)$$

identyczną z równaniem (8.23).

Podobnie zapisując równania dla węzłów Nr 5 i 11 otrzymamy związki (8.22) i (8.24), które po uwzględnieniu warunków brzegowych dadzą to samo rozwiązanie, które podane zostało w p. 8.1.4. W przypadku ortogonalnej siatki dyskretyzującej obszar rozwiązania metoda objętości skończonych staje się identyczna z metodą różnic skończonych.

8.2.2 Obszar kontrolny równoważny komórce siatki

Na rys. 8.13 przedstawiony jest obszar kontrolny, którym jest komórka ograniczona krawędziami siatki dyskretyzującej obszar rozwiązania. Niewiadomymi w tym przypadku są wartości funkcji $u(x,y)$ w punktach środkowych (A, B, C, D..) leżących we wnętrzu komórek: u_A, u_B, u_C, u_D . Wartości węzłowe, występujące w równaniach, oblicza się zwykle najprostszą metodą uśredniając sąsiednie wartości : $u_A = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)$ – w obszarach czworokątnych lub $u_A = \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3)$ – w obszarach trójkątnych.



Rys. 8.13 Obszar kontrolny równoważny komórce siatki 2D

Równanie (8.50) pozostaje tu dalej w mocy, ale szczegółowe wyrazy sumy będą teraz odmienne od (8.51, 8.52). Dla przykładu, gdy obszar kontrolny jest czworokątem (rys. 8.14) mamy

$$\sum_{\Gamma} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} n_x + \frac{\Delta u}{\Delta y} n_y \right] \Delta \Gamma = \sum_{\alpha=A,B,C,D} (u_{\alpha} - u_0) \gamma_{\alpha}, \quad (8.55)$$

gdzie

$$\gamma_{\alpha} = \frac{\Delta y_{\alpha}}{x_{\alpha} - x_0} - \frac{\Delta x_{\alpha}}{y_{\alpha} - y_0}. \quad (8.56)$$

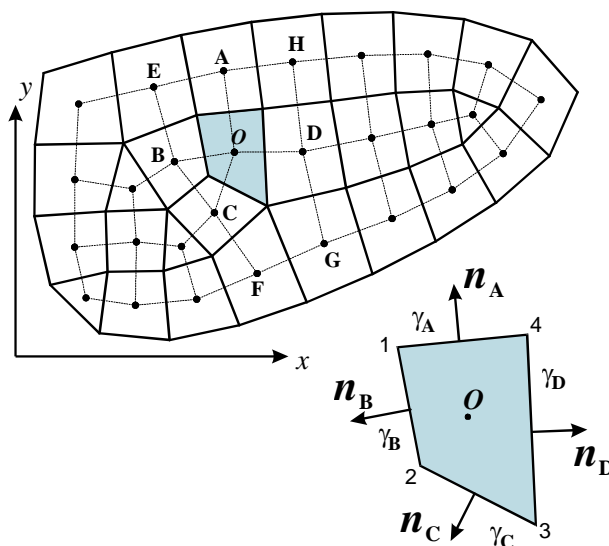
Obliczając najprostszym sposobem współrzędne punktów środkowych (uśredniając współrzędne sąsiadujących węzłów siatki) otrzymamy:

$$x_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad y_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i,$$

$$\Delta x_A = x_1 - x_4, \quad \Delta y_A = y_1 - y_4, \quad \Delta x_B = x_2 - x_1, \quad \Delta y_B = y_2 - y_1,$$

$$\Delta x_C = x_3 - x_2, \quad \Delta y_C = y_3 - y_2, \quad \Delta x_D = x_4 - x_3, \quad \Delta y_D = y_4 - y_3.$$

Pozwala to ułożyć równania dla wszystkich punktów środkowych, leżących wewnątrz siatki.



Rys. 8.14 Czworokątny obszar kontrolny

8.2.3 Podejście wzorowane na Metodzie Elementów Skończonych

Biorąc obszar kontrolny utworzony wokół węzła siatki i wprowadzając jawnie funkcje aproksymujące otrzymamy wersję Metody Objętości Skończonych (Kontrolnych) podobną do Metody Elementów Skończonych (MES – por. p. 8.3). Analogia okazuje się jeszcze bliższa gdy zastosujemy sposób budowania (agregacji) układu równań, w którym budujemy macierz współczynników w kolejności „oczek” siatki (elementów) co pozwala utworzyć macierze geometryczne analogicznie jak tworzone są macierze sztywności w MES (por. Podgórski, Błazik-Borowa [2001]). Podejście to pokażemy na przykładzie trójkątnego oraz prostokątnego elementu siatki zastosowanego do opisanego poprzednio równania Poissona.

W książce T. J. Chunga [2002] można znaleźć przykład zastosowania elementu czworokątnego, o dowolnym kształcie, co możliwe jest po wprowadzeniu ukośnokątnych, lokalnych układów współrzędnych. Zastosowanie takich elementów pokazane zostanie w p. 8.3, który poświęcony jest metodzie elementów skończonych.

Wyrazimy poszukiwaną funkcję $u(x,y)$ w obszarze elementu „e” – $u^{(e)}(x,y)$, przez sumę iloczynów wartości węzłowych u_i i funkcji aproksymujących $N_i^{(e)}(x,y)$:

$$u^{(e)}(x,y) = \sum_{i=1}^{Lw} N_i^{(e)}(x,y) u_i, \quad (8.57)$$

gdzie Lw oznacza liczbę węzłów elementu. Funkcje te w metodzie elementów skończonych noszą nazwę funkcji kształtu (por. Zienkiewicz [1972], [1994] oraz Podgórski, Błazik-Borowa [2001]) lub funkcji próbnych (por. Chung [2002]).

Po podstawieniu tego wyrażenia do (8.49) otrzymamy całkę po brzegu obszaru kontrolnego zbudowanego wokół węzła „ k ”:

$$\sum_{e=e_1}^{e_k} \sum_{i=1}^{Lw} \int_{\Gamma_k^{(e)}} (N_{i,x}^{(e)} n_x^{(e)} + N_{i,y}^{(e)} n_y^{(e)}) u_i d\Gamma = \sum_{e=e_1}^{e_k} \sum_{i=1}^{Lw} G_{ki}^{(e)} u_i = \sum_{e=e_1}^{e_k} g_k^{(e)}, \quad (8.58)$$

gdzie górne indeksy (e) oznaczają numer elementu połączonego z rozważanym węzłem „ k ”, e_1 – jest numerem pierwszego elementu a e_k – numerem ostatniego elementu połączonego z węzłem, $\Gamma_k^{(e)}$ – fragmentem obwodu obszaru kontrolnego wokół węzła „ k ”, należącego do elementu e .

W równaniu (8.58) oznaczono: $G_{ki}^{(e)} = \int_{\Gamma_k^{(e)}} (N_{i,x}^{(e)} n_x^{(e)} + N_{i,y}^{(e)} n_y^{(e)}) d\Gamma$, oraz $g_k^{(e)} = \sum_{i=1}^{Lw} G_{ki}^{(e)} u_i$.

Składowe $G_{ki}^{(e)}$ macierzy geometrycznej $\mathbf{G}^{(e)}$ oznaczają wpływ i -tego węzła elementu (e), na wartość całki po brzegu obszaru kontrolnego utworzonego wokół węzła „ k ”, składowa $g_k^{(e)}$ wektora węzłowego $\mathbf{g}^{(e)}$, jest udziałem całego elementu (e) w tej całce – równanie (8.49).

8.2.3.1 Element trójkątny

Przyjmujemy liniowe funkcje kształtu: $N_i(x,y) = a_{0i} + x a_{xi} + y a_{yi}$, gdzie stałe a_{0i} , a_{xi} , a_{yi} są tak dobrane aby funkcja $N_i(x,y)$ przybierała w węźle „ i ” wartość jednostkową i zerowe wartości w pozostałych węzłach elementu. Warunek ten można wyrazić w zwięzłej postaci następująco:

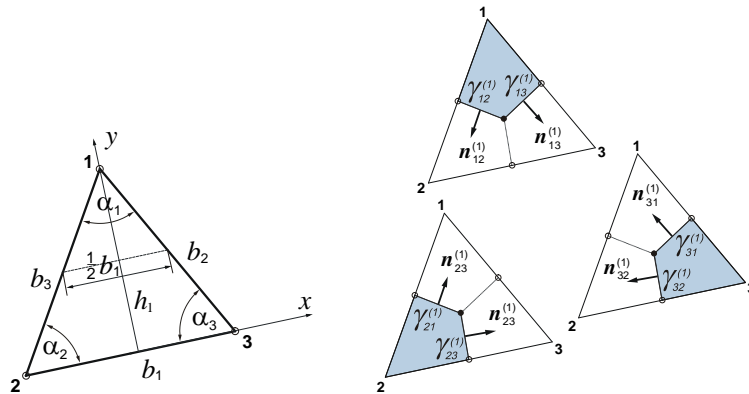
$$N_i^{(e)}(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad (8.59)$$

gdzie delta Kroneckera – $\delta_{ij}=1$ gdy $i = j$, lub 0 gdy $i \neq j$.

Przyjęcie liniowej kształtu pozwala łatwo obliczyć wartość całki w równaniu (8.58):

$$G_{ki}^{(e)} = \sum \left(a_{xi}^{(e)} n_{kx}^{(e)} + a_{yi}^{(e)} n_{ky}^{(e)} \right) \gamma_k^{(e)}, \quad (8.60)$$

gdzie $\gamma_k^{(e)}$ oznacza tą część obwodu obszaru kontrolnego wokół węzła „ k ”, która należy do elementu „ e ”, a n_{kx} , n_{ky} są składowymi wektora normalnego do tego brzegu, sumowanie odbywa się po wszystkich odcinkach brzegu.



a)

b)

Rys. 8.15 Element trójkątny i lokalny układ współrzędnych

Obliczymy teraz wartości składowych G_{ki} macierzy geometrycznej elementu trójkątnego pokazanego na rys. 8.15. Tak przyjęty lokalny układ współrzędnych daje następujące wartości stałych „a” funkcji $N_1(x,y)$: $a_{01} = 0$, $a_{x1} = 0$, $a_{y1} = 1/h_1$, gdzie h_1 jest wysokością trójkąta poprowadzoną z wierzchołka „1”. Ponieważ fragment brzegu obszaru kontrolnego wokół węzła „1”, należący do jednego elementu składa się z dwóch odcinków o długości γ_{12} i γ_{13} to składowa G_{11} sumy (8.60) w obszarze elementu trójkątnego obliczona dla funkcji $N_1(x,y)$ ma wartość:

$$G_{11}^{(e)} = \frac{1}{h_1^{(e)}} \left(n_{y12}^{(e)} \gamma_{12}^{(e)} + n_{y13}^{(e)} \gamma_{13}^{(e)} \right) = -\frac{b_1^{(e)}}{2h_1^{(e)}} = -\frac{1}{2} (\text{ctg } \alpha_2 + \text{ctg } \alpha_3), \quad (8.61)$$

gdzie b_1 jest długością boku leżącego naprzeciw wierzchołka „1”, α_2 i α_3 są kątami trójkąta leżącymi przy węzłach „2” i „3”.

Podobne obliczenia dla fragmentu brzegu wokół węzła „2” dają:

$$G_{21}^{(e)} = \frac{1}{h_1^{(e)}} \left(n_{y21}^{(e)} \gamma_{21}^{(e)} + n_{y23}^{(e)} \gamma_{23}^{(e)} \right) = \frac{b_3^{(e)}}{2h_1^{(e)}} = \frac{1}{2} \text{ctg } \alpha_3, \quad (8.62)$$

$$G_{31}^{(e)} = \frac{1}{h_1^{(e)}} \left(n_{y31}^{(e)} \gamma_{31}^{(e)} + n_{y32}^{(e)} \gamma_{32}^{(e)} \right) = \frac{b_2^{(e)}}{2h_1^{(e)}} = \frac{1}{2} \text{ctg } \alpha_2, \quad (8.63)$$

gdzie b_2 i b_3 są długościami boków leżących naprzeciw wierzchołków „2” i „3”.

Podobne obliczenia należy przeprowadzić dla funkcji kształtu $N_2(x,y)$ oraz $N_3(x,y)$.

Zbierając wszystkie obliczone składowe w macierz otrzymamy zależność:

$$\mathbf{g}^{(e)} = \mathbf{G}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}, \quad (8.64)$$

lub w postaci rozwiniętej:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(c_2 + c_3) & c_3 & c_2 \\ c_3 & -(c_1 + c_3) & c_1 \\ c_2 & c_1 & -(c_1 + c_2) \end{bmatrix}^{(e)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^{(e)}, \quad (8.65)$$

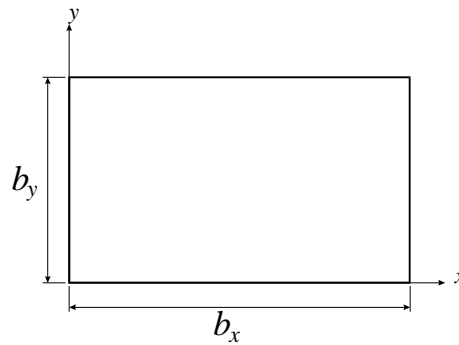
gdzie $c_i = \text{ctg } \alpha_i$, a wektor $\mathbf{u}^{(e)} = [u_i]^{(e)}$ zawiera wartości węzłowe poszukiwanej funkcji $u(x,y)$ w węzłach sąsiadujących z elementem (e).

8.2.3.2 Element prostokątny

Równania (8.57) i (8.58) pozostają również w mocy dla innych typów elementów. Pokażemy teraz przykład wyznaczania macierzy geometrycznej \mathbf{G} elementu prostokątnego o bokach b_x , b_y , który pokazany jest na rys. 8.16.

Funkcje kształtu $N_i(x,y)$, gdzie $i=1..4$ – jest lokalnym numerem węzła elementu, powinny spełniać warunek (8.59). Najprostszą postacią takiej funkcji jest wielomian postaci: $N(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$, który można otrzymać biorąc iloczyn funkcji liniowych: $\xi = x/b_x$, $\xi' = 1-\xi$, $\eta = y/b_y$, $\eta' = 1-\eta$. Odpowiednie wielomiany przyjmują wtedy postać:

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= (1-\xi)(1-\eta), & N_2(x,y) &= \xi(1-\eta), \\ N_3(x,y) &= \xi\eta, & N_4(x,y) &= (1-\xi)\eta. \end{aligned} \quad (8.66)$$



Rys. 8.16 Element prostokątny o bokach b_x, b_y

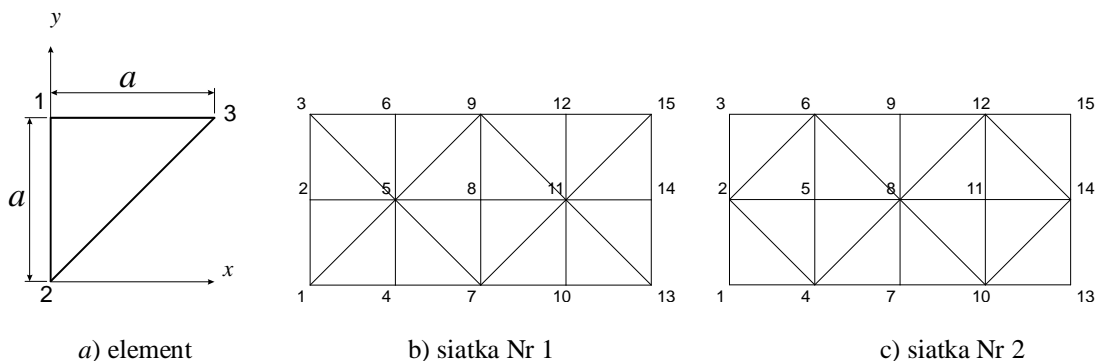
Po wykonaniu całkowania w obszarze elementu otrzymujemy macierz geometryczną $\mathbf{G}^{(e)}$ elementu prostokątnego w postaci:

$$\mathbf{G}^{(e)} = \frac{1}{8}(\lambda + 1/\lambda) \begin{bmatrix} -3 & 1+2\kappa & 1 & 1-2\kappa \\ 1+2\kappa & -3 & 1-2\kappa & 1 \\ 1 & 1-2\kappa & -3 & 1+2\kappa \\ 1-2\kappa & 1 & 1+2\kappa & -3 \end{bmatrix}, \quad (8.67)$$

gdzie $\lambda = b_x/b_y$, $\kappa = (1-\lambda^2)/(1+\lambda^2)$. W przypadku siatki o oczkach kwadratowych mamy: $\lambda = 1$, $\kappa = 0$.

8.2.3.3 Przykłady tworzenia układu równań

Wyniki otrzymane w równaniach (8.65) i (8.67) posłużą teraz do porównania różnych postaci układu równań, który otrzymujemy w celu wyznaczania wartości węzłowych u_i poszukiwanej funkcji $u(x,y)$ stosując opisane typy elementów. Posłużymy się w tym celu tym samym przykładem, który uprzednio rozwiązany został metodą różnic skończonych oraz metodą objętości skończonych w p. 8.2.1.



Rys. 8.17 Element trójkątny oraz dwie różne siatki dyskretyzujące obszar rozwiązania

Element trójkątny o bokach: $b_1 = a\sqrt{2}$, $b_2 = a$, $b_3 = a$ i powierzchni $A = \frac{1}{2}a^2$, pokazany na rysunku 8.17a. Wartości kotangensów wynoszą: $c_1 = \text{ctg}\alpha_1 = 0$, $c_2 = \text{ctg}\alpha_2 = 1$, $c_3 = \text{ctg}\alpha_3 = 1$. Macierz geometryczna tego elementu jest zatem równa:

$$\mathbf{G}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Budując obszar kontrolny wokół węzła Nr 8 (rys. 8.17b) otrzymamy:

$$\sum_{e=1}^4 \mathbf{g}_8^{(e)} = -\Omega p_0, \text{ lub w postaci rozwiniętej:} \quad (8.68)$$

$$0,5(u_5 + u_7 - 2u_8) + 0,5(u_7 + u_{11} - 2u_8) +$$

$$+ 0,5(u_{11} + u_9 - 2u_8) + 0,5(u_9 + u_5 - 2u_8) = -\Omega p_0,$$

które po uporządkowaniu przyjmie postać:

$$u_5 + u_7 + u_9 + u_{11} - 4u_8 = -\Omega p_0, \quad (8.69)$$

podobną do otrzymanej w równaniu (8.23). Wielkość obszaru kontrolnego Ω jest tu nieco mniejsza niż w równaniu (8.23) i wynosi $\Omega_1 = 4 \cdot \frac{A}{3} = \frac{2}{3}a^2$. Przyjmując siatkę elementów o nieco innym kształcie (rys. 8.17c) otrzymamy $\Omega_2 = 8 \cdot \frac{A}{3} = \frac{4}{3}a^2$, a zatem więcej niż w równaniu (8.23). Wartość średnia obszarów kontrolnych obu siatek jest równa $\Omega = a^2$, tzn. tyle ile obliczona w równaniu (8.23).

Element kwadratowy o boku a , zastosowany do dyskretyzacji tego samego obszaru daje znacznie bardziej rozbudowany układ równań, co spowodowane jest wyższym stopniem wielomianu interpolacyjnego zastosowanego jako funkcja kształtu tego elementu – por. równanie (8.66). Macierz geometryczna elementu kwadratowego ($\lambda=1$, $\kappa=0$) obliczona na podstawie (8.67) jest równa:

$$\mathbf{G}^{(1)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Obszar kontrolny zbudowany z tych elementów wokół węzła Nr 8 (rys. 8.20xx) implikuje równanie:

$$\begin{aligned} & (u_5 + u_4 + u_7 - 3 u_8) + (u_7 + u_{10} + u_{11} - 3 u_8) + \\ & (u_{11} + u_{12} + u_9 - 3 u_8) + (u_9 + u_6 + u_5 - 3 u_8) = -4 \Omega p_0, \end{aligned} \quad (8.70)$$

które po niewielkich przekształceniach przyjmuje postać:

$$(u_4 + u_{10} + u_{12} + u_6) + 2(u_5 + u_7 + u_{11} + u_9) - 12 u_8 = -4 a^2 p_0. \quad (8.71)$$

Powierzchnia obszaru kontrolnego $\Omega = a^2$ jest tu taka sama jak w równaniu (8.23). Wypisując podobne równania dla węzłów 5 i 11 (por. rys. 8.6) i uwzględniając warunki $u_i=0$ na brzegach obszaru, otrzymamy następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_5 \\ u_8 \\ u_{11} \end{bmatrix} = 2a^2 p_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.72)$$

Po jego rozwiązaniu otrzymujemy wartości węzłowe poszukiwanej funkcji $u(x,y)$ $u_5 = u_{11}$, $u_{11} = 0,41176 a^2 p_0$, $u_8 = 0,47059 a^2 p_0$, nieco różniące się od rozwiązania równania (8.25). Porównując to rozwiązanie z wartością dokładną, podaną w p. 8.1.4, dostaniemy błąd równy +3,32% , a więc nieco mniejszy niż błąd rozwiązania uzyskanego metodą różnic skończonych.

8.3 Metoda elementów skończonych

Początków metody elementów skończonych (MES) doszukiwać się można w latach 20 i 30 XX wieku, kiedy w USA G. B. Maney i H. Cross oraz A. Ostefeld w Holandii, korzystając z prac J. C. Maxwella, A. Castiliano oraz O. Mohra, zaproponowali metodę rozwiązywania zagadnień mechaniki konstrukcji znaną dzisiaj jako metoda przemieszczeń.

Uogólnienia tej metody, dzięki pracom R. Couranta, na mechanikę kontinuum dokonali w połowie XX wieku J. Argyris, P. C. Pattan, S. Kelsey, M. Turner, R. Clough i inni. W latach 60 i 70 metoda elementów skończonych przeszła szereg modyfikacji m.in. dzięki pracom O. C. Zienkiewicza, Y. K. Cheunga, R. L. Taylora, A. J. Bakera, które uczyniły z niej współczesne uniwersalne narzędzie służące do rozwiązywania zagadnień mechaniki ciała stałego, przepływów ciepła, mechaniki płynów, pól elektromagnetycznych, itp.

Krótki rys historyczny MES znaleźć można w książce Gallaghery [1975], podstawy teoretyczne metody i wiele przykładów zastosowań znaleźć można w książkach Zienkiewicza [1972], Zienkiewicza i Taylora [1994], Hughes'a [1987], Chunga [2002] Kleibera i in. [1995].

8.3.1 Podstawowa koncepcja metody elementów skończonych

Współczesne koncepcje MES bazują na metodzie Galerkina, która umożliwia przyjęcie przybliżonego rozwiązania problemu opisanego równaniem różniczkowym w postaci liniowej kombinacji funkcji:

$$u(\mathbf{x}) \approx \sum_{e=1}^{Le} U^{(e)}(\mathbf{x}), \quad (8.73)$$

Gdzie \mathbf{x} jest wektorem określającym położenie punktu w przestrzeni $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$, Le jest liczbą funkcji aproksymujących. Funkcje aproksymujące $U^{(e)}(x,y)$ spełniać muszą warunki brzegowe ale nie muszą spełniać samego równania różniczkowego. Przybliżone spełnienie równania uzyskuje się metodą minimalizacji błędu aproksymacji przez jego ortogonalizację z każdą z funkcji $U^{(e)}$ w obszarze rozwiązania:

$$\int_{\Omega} U^{(e)} \mathbf{D}u \, d\Omega = 0, \quad (8.74)$$

gdzie \mathbf{D} jest operatorem równania różniczkowego: $\mathbf{D}u(\mathbf{x})=0$, a Ω oznacza obszar rozwiązania.

Trudności w doborze odpowiednich funkcji aproksymujących, które muszą spełniać warunki brzegowe o obszarze Ω , o niejednokrotnie skomplikowanym kształcie można pokonać przez „zlokalizowanie” funkcji aproksymujących. Obszar rozwiązania dzieli się na Le rozłącznych podobszarów $\Omega^{(e)}$ o prostych kształtach (trójkąty i czworokąty – na płaszczyźnie, czworościany, pięcio i sześciociany – w przestrzeni), podobszary te nazywane są elementami skończonymi. Funkcje aproksymujące $U^{(e)}$ dobiera się tak, aby miały wartości równe zero poza obszarem $\Omega^{(e)}$, a wewnątrz były prostymi gładkimi funkcjami sparametryzowanymi przez wartości węzłowe. Węzły są zwykle narożami wieloboków (wielościanów w przestrzeni) lub środkami ich krawędzi. Od funkcji $U^{(e)}$ żąda się też warunków ciągłości na brzegach obszaru. Ciągłość pochodnych rzędu $(m-1)$, gdzie m jest rzędem równania różniczkowego, oznacza spełnienie *warunków zgodności*, a ciągłość pochodnych rzędu m – *warunkiem zupełności*.

Funkcje aproksymujące w obszarze elementu przyjmuje się zwykle w postaci sumy funkcji bazowych (zwane są one też funkcjami kształtu, funkcjami interpolacyjnymi, funkcjami próbnymi):

$$U^{(e)} = \sum_{i=1}^{We} N_i^{(e)}(\mathbf{x}) u_i, \quad (8.75)$$

gdzie u_i oznacza wartości węzłowe poszukiwanej funkcji, $N_i^{(e)}(\mathbf{x})$ jest funkcją bazową „*i*-tego” węzła w obszarze elementu (e) , We oznacza liczbę węzłów tego elementu, „*i*” jest lokalnym numerem węzła.

Po podstawieniu (8.73) do (8.74) i uwzględnieniu (8.75), otrzymamy układ równań, który pozwoli wyznaczyć poszukiwane wartości węzłowe funkcji $u(\mathbf{x})$:

$$\sum_{e=e1}^{Lei} \sum_{j=j1}^{Lwe} \int_{\Omega} [N_i^{(e)}(\mathbf{x}) \mathbf{D}N_j^{(e)}(\mathbf{x}) u_j] d\Omega = 0, \quad i = 1..Lw, \quad (8.76)$$

gdzie Lw jest liczbą węzłów siatki dyskretyzacyjnej. Pierwsza suma dotyczy tylko tych elementów, które połączone są z węzłem „*i*”, $e1$ jest numerem pierwszego a Lei ostatniego z elementów dołączonych do węzła „*i*”. Druga suma dotyczy tylko tych węzłów „*j*”, które należą do elementu „*e*”, „*j1*” jest globalnym numerem pierwszego węzła połączonego z elementem „*e*” a Lwe globalnym numerem ostatniego z tych węzłów. Szczegóły procesu zestawiania (agregacji) tego układu równań przedstawione są w wielu książkach poświęconych MES (np. Podgórski, Błazik-Borowa [2001]).

8.3.2 Rozwiązania równania Poissona

Przedstawimy teraz zastosowanie MES na przykładzie wielokrotnie (p. 8.1.4, 8.2.3) już rozwiązywanego równania Poissona w obszarze 2D:

$$\mathbf{D}u(\mathbf{x}) = \nabla^2 u(x, y) + p(x, y) = 0. \quad (8.77)$$

Po wstawieniu tego równania do (8.74) i uwzględnieniu zależności (8.75) otrzymamy:

$$\int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} (\nabla^2 u + p) d\Omega = 0, \quad i = 1..We. \quad (8.78)$$

A po zastosowaniu twierdzenia Gaussa-Greena przekształcimy je do postaci:

$$\int_{\Gamma^{(e)}} [N_i^{(e)} (\nabla u) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} [\nabla N_i^{(e)} \cdot \nabla u] d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} p d\Omega = 0, \quad i = 1..We \quad (8.79)$$

gdzie $\Gamma^{(e)}$ oznacza brzeg elementu.

Zestawiając te równania w postaci macierzowej otrzymamy:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{q}^{(e)}, \quad (8.80)$$

gdzie $\mathbf{K}^{(e)}$ nosi nazwę macierzy sztywności (dyfuzji, lepkości itp.) elementu, $\mathbf{u}^{(e)}$ jest wektorem (macierzą kolumnową) wartości węzłowych poszukiwanej funkcji, $\mathbf{p}^{(e)}$ jest wektorem sił węzłowych elementu (lub wektorem źródeł), $\mathbf{q}^{(e)}$ jest wektorem warunków brzegowych Neumanna.

Wstawiając sumę funkcji bazowych zamiast $u(x,y)$ (równ. 8.71) otrzymamy:

$$K_{ij} = \int_{\Omega^{(e)}} (N_{i,x} N_{j,x} + N_{i,y} N_{j,y}) d\Omega, \quad (8.81)$$

$$p_i = \int_{\Omega^{(e)}} (N_i p) d\Omega, \quad (8.82)$$

$$q_i = \int_{\Gamma^{(e)}} N_i (u_{,x} n_x + u_{,y} n_y) d\Gamma, \quad (8.83)$$

gdzie K_{ij} są składowymi macierzy sztywności $\mathbf{K}^{(e)}$, p_i oznacza składową wektora źródeł $\mathbf{p}^{(e)}$, q_i składową wektora warunków brzegowych Neumanna $\mathbf{q}^{(e)}$.

Pokażemy teraz szczegóły tworzenia tych macierzy na przykładach dwóch elementów: trójkątnego i czworokątnego.

8.3.3 Element trójkątny

Trójkątny element zbudowany dla rozwiązania równania Poissona przypomina trójkątne elementy tarczowe służące rozwiązywaniu zagadnienia statyki tarcz (por. Podgórski i Błazik-Borowa [2001]), jest jednak nieco prostszy, gdyż obliczamy tu pojedyncze wartości węzłowe u_i . Zastosujemy liniowe funkcje bazowe (funkcje kształtu) w postaci: $N_i(x,y) = a_{0i} + x a_{xi} + y a_{yi}$, gdzie stałe a_{0i} , a_{xi} , a_{yi} są tak dobrane aby funkcja $N_i(x,y)$ przybierała w węźle „i” wartość jednostkową i zerowe wartości w pozostałych węzłach (por. 8.2.3.1), tzn.

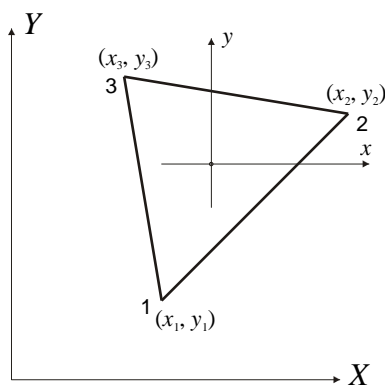
$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad (8.84)$$

gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera.

Oznaczmy osie globalnego kartezjańskiego układu współrzędnych dużymi literami: X, Y a osie lokalnego układu małymi literami: x, y jak na rysunku 8.18. Początek układu x, y założymy w środku trójkąta: $X_0 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$, $Y_0 = \frac{1}{3}(Y_1 + Y_2 + Y_3)$. Lokalne współrzędne można więc obliczyć ze wzoru: $x_i = X_i - X_0$, $y_i = Y_i - Y_0$. Lokalna numeracja węzłów (1,2,3) musi być tak dobrana aby wyznacznik:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (8.85)$$

miał wartość dodatnią, A oznacza tu pole powierzchni elementu.



Rys. 8.18 Układy współrzędnych elementu trójkątnego

Wstawiając do równania (8.84) współrzędne kolejnych węzłów trójkąta otrzymamy układ równań, z którego można wyznaczyć stałe a występujące w równaniu funkcji kształtu:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0i} \\ a_{xi} \\ a_{yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{bmatrix}. \quad (8.86)$$

Rozwiązanie tego układu równań daje następujące wartości stałych:

$$a_{0i} = \frac{1}{3}, \quad a_{xi} = \frac{1}{2A}(y_j - y_k), \quad a_{yi} = \frac{1}{2A}(x_k - x_j), \quad (8.87)$$

gdzie indeksy i, j, k tworzą cykl: 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2.

Pochodne funkcji kształtu wynoszą: $N_{i,x} = a_{xi}$, $N_{i,y} = a_{yi}$. Wstawiając te wartości do równania (8.81) otrzymamy:

$$K_{ij} = \int_{\Omega^{(e)}} (a_{xi}a_{xj} + a_{yi}a_{yj}) d\Omega = A(a_{xi}a_{xj} + a_{yi}a_{yj}). \quad (8.88)$$

Ponieważ w równaniu (8.88) nie występują stałe a_{0i} , a a_{xi} oraz a_{yi} nie zależą od położenia środka lokalnego układu współrzędnych, można w równaniach (8.87) wstawić współrzędne globalne, jeżeli układ lokalny nie jest obrocony względem globalnego.

Można teraz zestawić całą macierz sztywności elementu trójkątnego:

$$\mathbf{K}^{(e)} = A \begin{bmatrix} a_{x1}^2 + a_{y1}^2 & a_{x1}a_{x2} + a_{y1}a_{y2} & a_{x1}a_{x3} + a_{y1}a_{y3} \\ a_{x2}a_{x1} + a_{y2}a_{y1} & a_{x2}^2 + a_{y2}^2 & a_{x2}a_{x3} + a_{y2}a_{y3} \\ a_{x3}a_{x1} + a_{y3}a_{y1} & a_{x3}a_{x2} + a_{y3}a_{y2} & a_{x3}^2 + a_{y3}^2 \end{bmatrix}. \quad (8.89)$$

Dla porównania z macierzą geometryczną obszaru trójkątnego obliczymy składowe tej macierzy dla elementu opisanego w p. 8.2.3.1. Współrzędne węzłów i stałe funkcji kształtu podane zostały w tablicy (8.1).

Tablica 8.1 Parametry elementu trójkątnego

i	X_i	Y_i	a_{xi}	a_{yi}
1	0	0	$-1/a$	$1/a$
2	0	$-a$	0	$-1/a$
3	a	0	$1/a$	0

Po uwzględnieniu, że $A = a^2/2$ otrzymamy macierz sztywności elementu:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

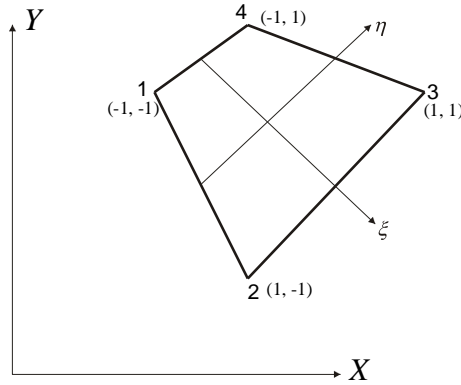
która różni się tylko znakiem od macierzy geometrycznej $\mathbf{G}^{(1)}$ wyznaczonej w punkcie 8.2.3.1.

8.3.4 Element czworokątny

Element czworokątny służący rozwiązywaniu równań Poissona i Laplace'a zbudujemy stosując metodę zaproponowaną przez Zienkiewicza, który zastosował te same funkcje bazowe do utworzenia funkcji aproksymującej rozwiązanie, jak też do transformacji lokalnych współrzędnych elementu do globalnego układu kartezjańskiego. Elementy

zbudowane tą metodą noszą nazwę elementów izoparametrycznych (por. Zienkiewicz [1972], [1994], Chung [2002]).

Na rysunku 8.19 pokazany został czworokątny element wraz z układem lokalnych współrzędnych (ξ, η) . Początek tego układu założony jest w środku ciężkości czworokąta, współrzędne są bezwymiarowe, przyjmując w węzłach wartości $\xi_i, \eta_i = \pm 1$. Numery węzłów pokazane na rysunku są numerami lokalnymi, mającymi znaczenie tylko dla tego elementu.



Rys. 8.19 Czworokątny element izoparametryczny oraz stosowane układy współrzędnych

Funkcje bazowe (funkcje kształtu) budujemy z wielomianów II stopnia przyjmując podobnie jak w równaniach (8.66):

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \end{aligned} \quad (8.90)$$

Nieco inna postać funkcji bazowych związana jest tu z innym przyjęciem środka układu współrzędnych.

Globalne współrzędne kartezjańskie (X, Y) związane są zatem z lokalnym układem (ξ, η) w następujący sposób:

$$X = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) Y_i. \quad (8.91)$$

Wstawiając funkcje bazowe (8.90) do równania (8.81) otrzymamy składowe macierzy sztywności elementu:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{\Omega^{(e)}} (N_{i,x} N_{j,x} + N_{i,y} N_{j,y}) d\Omega = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_{i,x} N_{j,x} + N_{i,y} N_{j,y}) J d\xi d\eta = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k_{ij}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (8.92)$$

gdzie $d\Omega = dx dy = J d\xi d\eta$, J – oznacza wyznacznik Jakobianu: $J = \det(\mathbf{J})$,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}.$$

Funkcje $k_{ij}(\xi, \eta)$ występujące w ostatniej całce (8.92) należy przekształcić tak aby zawierały pochodne względem współrzędnych lokalnych (ξ, η) :

$$k_{ij}(\xi, \eta) = (J_{22}N_{i,\xi} + J_{12}N_{i,\eta})(J_{22}N_{j,\xi} + J_{12}N_{j,\eta}) + (J_{21}N_{i,\xi} + J_{11}N_{i,\eta})(J_{21}N_{j,\xi} + J_{11}N_{j,\eta}). \quad (8.93)$$

Ze względu na wygodę całkę zawierającą k_{ij} oblicza się zwykle numerycznie stosując kwadraturę Gaussa. Wzór 5-cio punktowy wystarcza aby całki (8.92) obliczyć dokładnie. Tak więc składowa macierzy sztywności elementu czworokątnego może być obliczona ze wzoru:

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k_{ij}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{m=1}^{L_G} \sum_{n=1}^{L_G} w_m w_n k_{ij}(\xi_m, \eta_n), \quad (8.94)$$

gdzie L_G – oznacza liczbę punktów Gaussa, w_m, w_n – współczynniki wagowe a ξ_m, η_n – współrzędne punktów Gaussa. W tablicy (8.2) podane są (por. Baker [1983]) współczynniki wagowe i współrzędne tych punktów dla $L_G = 5$.

Tablica 8.2 Współczynniki wagowe i współrzędne punktów Gaussa

ξ_m, η_m	w_m
$\pm 0,90617\ 98459\ 38664$	0,23692 68850 56189
$\pm 0,53846\ 93101\ 05683$	0,47862 86704 99366
0,0	0,56888 88888 88889

Składowe macierzy sztywności elementu kwadratowego o boku a , obliczone zgodnie z tymi formułami są następujące (podano tylko 6 miejsc znaczących):

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} +0,666667 & -0,166667 & -0,333333 & -0,166667 \\ -0,166667 & +0,666667 & -0,166667 & -0,333333 \\ -0,333333 & -0,166667 & +0,666667 & -0,166667 \\ -0,166667 & -0,333333 & -0,166667 & +0,666667 \end{bmatrix}, \quad (8.95)$$

różnią się więc istotnie od składowych macierzy geometrycznej $\mathbf{G}^{(1)}$, obliczonych w p. 8.2.3.2.

Ograniczając się tylko do elementów prostokątnych, podobnie jak to zrobiliśmy w równaniach (8.66) i (8.67) otrzymamy macierz sztywności:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{1}{6\lambda} \begin{bmatrix} 2(1+\lambda^2) & \lambda^2-2 & -1-\lambda^2 & 1-2\lambda^2 \\ \lambda^2-2 & 2(1+\lambda^2) & 1-2\lambda^2 & -1-\lambda^2 \\ -1-\lambda^2 & 1-2\lambda^2 & 2(1+\lambda^2) & \lambda^2-2 \\ 1-2\lambda^2 & -1-\lambda^2 & \lambda^2-2 & 2(1+\lambda^2) \end{bmatrix}, \quad (8.96)$$

gdzie podobnie jak poprzednio $\lambda = b_x/b_y$.

Macierz sztywności elementu kwadratowego ($\lambda=1$) obliczona na podstawie (8.96) jest równa:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

a więc identyczna (z dokładnością do 12-go miejsca znaczącego) z macierzą podaną w równaniu (8.95).

Składowe wektora źródeł \mathbf{p} (równ. 8.78), przy stałej wartości $p(x,y)=p_0$ w obszarze elementu są równe:

$$\mathbf{p}^{(1)} = \frac{a^2 p_0}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zestawiając jeszcze raz układ równań rozwiązujących równanie Poissona (por. równ. 8.25 i 8.68) otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & -1 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_5 \\ u_8 \\ u_{11} \end{bmatrix} = 3a^2 p_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.97)$$

Po jego rozwiązaniu dostajemy wartości węzłowe poszukiwanej funkcji $u(x,y)$ $u_5 = u_{11}$, $u_{11} = 0,43548 a^2 p_0$, $u_8 = 0,48387 a^2 p_0$. Wartość u_8 różni się nieco od rozwiązania równania (8.25). Porównując u_8 z wartością dokładną, podaną w p. 8.1.4, dostaniemy błąd równy +6,23% , porównywalny (ale przeciwny co do znaku) z błędem rozwiązania uzyskanego metodą różnic skończonych. Błąd ten jest prawie dwukrotnie większy niż błąd rozwiązania metodą objętości kontrolnych (równ. 8.68), ale przy tej gęstości siatki dyskretyzującej obszar rozwiązania, trudno wyciągać ogólne wnioski co do dokładności obu metod.

8.3.5 Przykłady agregacji globalnego układu równań

Agregacja (zestawianie) układu równań MES, może zostać wykonana przez zsumowanie iloczynów macierzy sztywności elementów i macierzy połączeń (alokacji). Metoda ta (por. Podgórski, Błazik-Borowa [2001]), zastosowana bezpośrednio w komputerowej realizacji algorytmu, jest jednak bardzo czasochłonna i wymaga rezerwowania dużych obszarów pamięci operacyjnej komputera na przechowanie dużych macierzy alokacji. Dlatego też nie jest praktycznie stosowana. Przedstawimy teraz „praktyczny” algorytm

agregacji, stosowany w większości komputerowych realizacji. Algorytm zapisany zostanie w pseudokodzie o składni zbliżonej do popularnego skryptowego języka *Perl*. Znak # (hash) oraz druk pochyły oznacza tu wiersz komentarza, bloki poleceń wykonywanych w pętli zaznaczane są przez odpowiednie wcięcie wiersza. Nazwy pisane z separatorem w postaci dolnej kreski np. `Utwórz_macierz`, oznaczają wywołanie odpowiedniej procedury realizującej złożoną operację.

```
# Agregacja_K

• Inicjuj_Globalną_Macierz_Sztynności_K[N,N]
  # Tworzymy wypełnioną zerami tablicę K o rozmiarach N×N,
  # w której przechowywane będą składowe globalnej macierzy sztywności.
  # N oznacza liczbę niewiadomych występujących w zadaniu.

• Dla każdego elementu wykonaj:
  ○ Utwórz_macierz_Ke
    # Tworzymy macierz sztywności elementu o wymiarach We×We,
    # gdzie We jest liczbą węzłów elementu

  ○ Dla każdej składowej Ke[i,j] wykonaj:
    ▪ Czytaj_globalne_numery_węzłów(i,j)
      # Należy odczytać globalne numery (Ni,Nj) węzłów o numerach
      # lokalnych: i,j

    ▪ Wstaw K[Ni,Nj] ← K[Ni,Nj] + Ke[i,j]
      # Do zawartości „komórki” K[Ni,Nj] globalnej macierzy sztywności
      # należy dodać składową Ke[i,j] macierzy sztywności elementu
    ○ # Koniec Dla każdej składowej
• # Koniec Dla każdego elementu

# Koniec agregacji
```

Oczywiście macierz sztywności może być przechowywana w tablicach prostokątnych lub wektorach w celu zaoszczędzenia pamięci. W równaniach liniowych gdzie macierz sztywności jest symetryczna można przechowywać tylko jej górną lub dolną połowę. Ostatni blok algorytmu (wstawianie) w tym przypadku należy zmodyfikować tak aby N_i , N_j oznaczały położenie składowej $\mathbf{K}e[i,j]$ w zmodyfikowanej tablicy globalnej.

Algorytm ten, dostosowany do składowania macierzy sztywności w tablicy jednowymiarowej, bez zapamiętywania zerowych składowych macierzy, wykorzystany został w programie **Poisson2D**, który powstał w Katedrze Mechaniki Budowli Politechniki Lubelskiej. Aby zademonstrować jego działanie pokażemy składowe globalnej macierzy związanej z równaniem Poissona w obszarze prostokątnym o wymiarach $2a \times 4a$ (por. rys. 8.6), przed uwzględnieniem warunków brzegowych. Macierz globalna \mathbf{K} ma w tym przypadku wymiary 15×15 , przedstawiona została w tablicy 8.3. Pominięte tu zostały (ze względu na zwiększenie czytelności) składowe leżące poniżej przekątnej oraz zerowe składowe leżące powyżej górnego pasma.

Tablica 8.3 Składowe macierzy sztywności obszaru 2×4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
0.667	-0.167	0.0	0.0	0.0	-0.167	-0.333									1

1.333	-0.167	0.0	0.0	-0.333	-0.333	-0.333									2
	1.333	-0.167	0.0	0.0	-0.333	-0.333	-0.333								3
		1.333	-0.167	0.0	0.0	-0.333	-0.333	-0.333							4
			0.667	0.0	0.0	0.0	-0.333	-0.167							5
				1.333	-0.333	0.0	0.0	0.0	-0.167	-0.333					6
					2.667	-0.333	0.0	0.0	-0.333	-0.333	-0.333				7
						2.667	-0.333	0.0	0.0	-0.333	-0.333	-0.333			8
							2.667	-0.333	0.0	0.0	-0.333	-0.333	-0.333		9
								1.333	0.0	0.0	0.0	-0.333	-0.167		10
									0.667	-0.167					11
										1.333	-0.167				12
											1.333	-0.167			13
												1.333	-0.167		14
													0.667		15

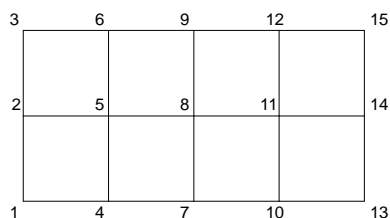
Symetria

Rozwiązanie układu równań liniowych, który powstaje po agregacji macierzy sztywności i uwzględnieniu warunków brzegowych jest zagadnieniem dosyć prostym jeżeli liczba równań jest niewielka, co obecnie oznacza zwykle kilka tysięcy równań. Stosowane są wtedy metody klasyczne jak eliminacja Gaussa lub faktoryzacja Banachiewicza-Cholesky'ego (dla układów symetrycznych), dostosowane do pasmowej struktury macierzy. Ponieważ macierz sztywności jest macierzą rzadką, tzn. macierzą w której tylko niewielka liczba składowych jest różna od zera, to bardzo efektywnymi metodami rozwiązywania równań okazują się w tym przypadku metody iteracyjne jak metoda Gaussa-Seidela oraz metody gradientowe (por. Saad[2003]).

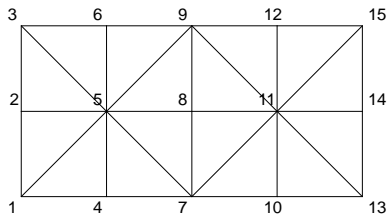
8.3.6 Przykłady rozwiązań równania Poissona

Obliczone w poprzednim punkcie składowe macierzy sztywności trójkątnego i kwadratowego elementu skończonego posłużą nam teraz do pokazania wpływu kształtu i gęstości siatki na dokładność rozwiązania. Rozwiążemy zadanie rozwiązywane poprzednio metodą różnic skończonych (p. 8.1.4) i metodą objętości skończonych (p. 8.2.3.3).

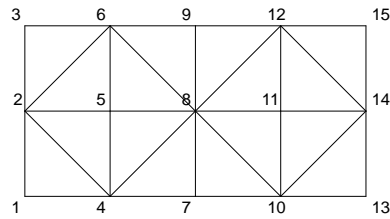
Obszar prostokątny o wymiarach $2a \times 4a$ podzielony został kilkoma siatkami kwadratowymi: 2×4 , 4×8 , 6×12 , 8×16 , 12×24 , 16×32 , 32×64 . W obszarze siatek zastosowano kwadratowe (rys. 8.20) i trójkątne elementy o dwóch schematach (rys. 8.21 a, b). W siatce A (rys. 8.21a) węzeł środkowy ($Nr 8$) otoczony jest czterema elementami trójkątnymi a w siatce B (rys. 8.21b) - ośmioma.



Rys. 8.20 Siatka $2a \times 4a$ zbudowana z elementów kwadratowych



a) siatka A



b) siatka B

Rys. 8.21 Siatki zbudowane z elementów trójkątnych

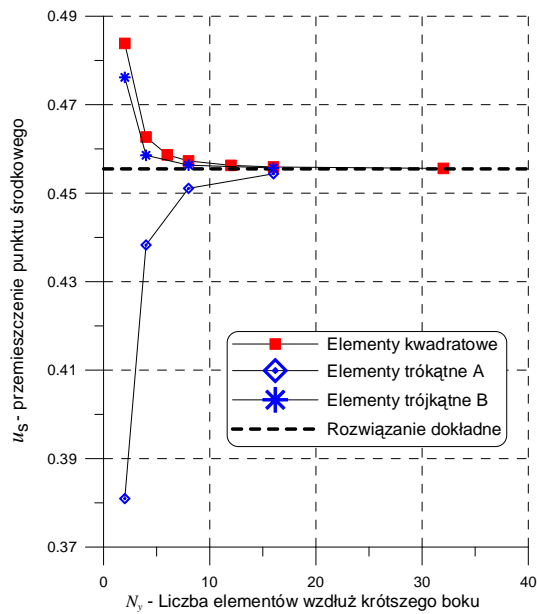
We wszystkich węzłach brzegowych założono zerowe wartości funkcji $u(x,y)$, funkcja źródeł równania Poissona przyjęta została jako stała w całym obszarze: $p(x,y) = p_0 = \text{const}$.

Zadanie rozwiązano za pomocą programu **Poisson2D** otrzymując węzłowe wartości funkcji $u(x,y)$. Porównywano wartość u w węzle centralnym z rozwiązaniem dokładnym oraz między kolejnymi schematami. Wyniki przedstawione zostały na wykresie (rys. 8.22) oraz w tabelicy 8.4. w zależności od liczby elementów na krótszym boku obszaru.

Tabelica 8.4 Wartości $u(a^2 p_0)$ w punkcie środkowym

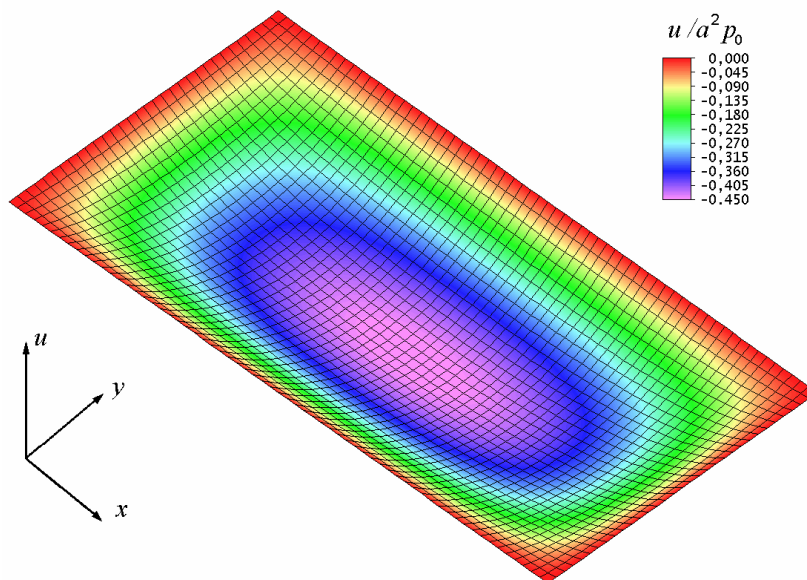
N_y	Liczba niewiadomych	Kształt siatki			Wynik dokładny
		kwadratowa	trójkątna A	trójkątna B	
2	3	0,483871	0,380952	0,476190	0,45549
4	21	0,462684	0,438280	0,458569	
6	55	0,458676			
8	105	0,457279	0,451083	0,456327	
12	253	0,456282			
16	465	0,455934	0,454388	0,455693	
32	1953	0,455599			

Widoczna jest tu szybsza zbieżność wyniku do wartości dokładnej dla siatki kwadratowej. Siatka trójkątna daje rezultaty wolniej zbieżne w węzłach otoczonych przez cztery elementy a szybciej zbieżne dla węzłów otoczonych przez osiem elementów. Dokładność rozwiązania staje się dostatecznie dokładna (błąd mniejszy niż 1%) przy podziale krótszego boku prostokąta na 6 odcinków.

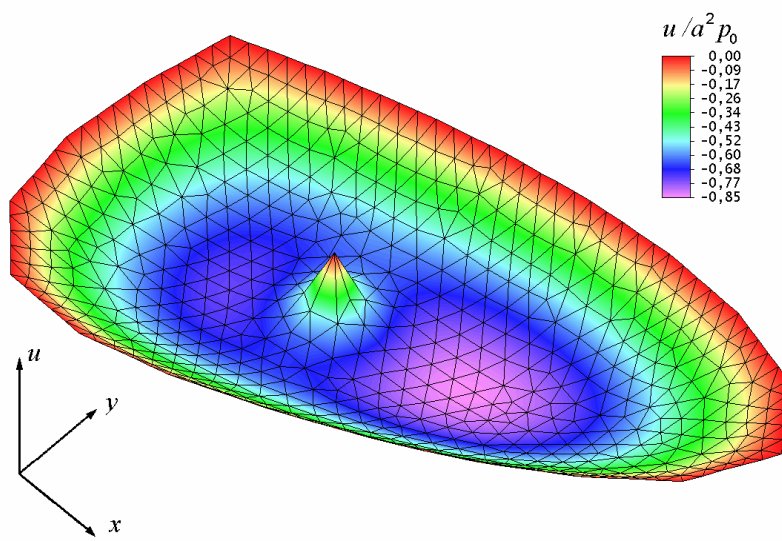


Rys. 8.22 Zależność wyniku od gęstości i kształtu siatki

Na rysunku 8.23 przedstawiono mapę funkcji $u(x,y)$ uzyskaną dla siatki elementów 32×64 . Rys. 8.23 przedstawia mapę funkcji, która jest rozwiązaniem równania Poissona w obszarze pokazanym na rysunku 8.1, przy analogicznych jak w zadaniu poprzednim warunkach brzegowych i tej samej funkcji źródła.



Rys. 8.23 Rozwiązanie równania Poissona w obszarze prostokątnym $2a \times 4a$ - siatka kwadratowa



Rys. 8.24 Rozwiązanie równania Poissona w obszarze o brzegu krzywoliniowym - siatka trójkątna