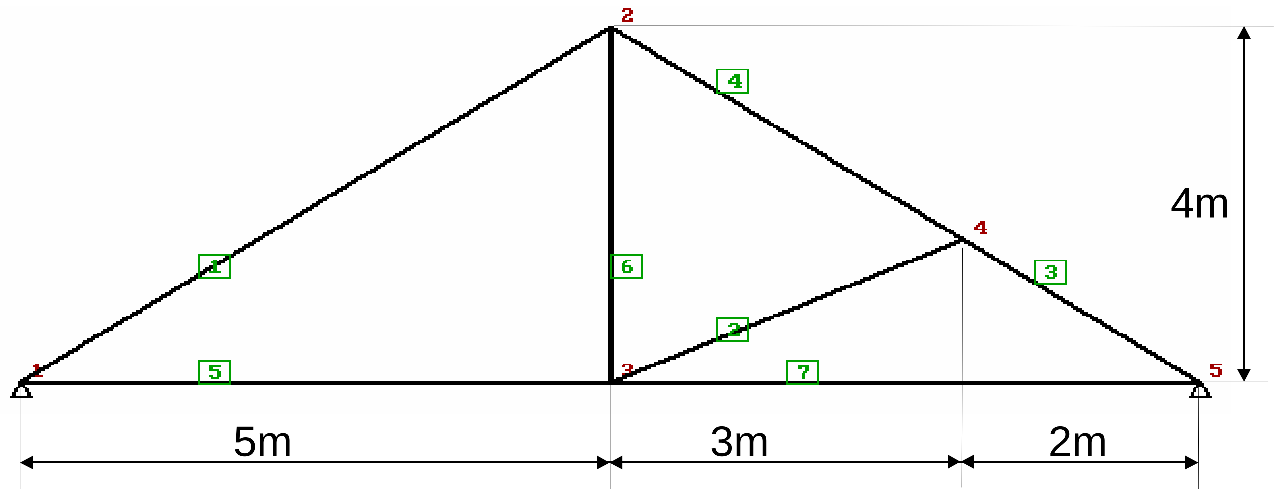
MUZ 1 zaliczenie 31.01.2010

Grupa 1A

Zadanie 1 (1pkt.)
Znaleźć bloki **J** macierzy sztywności trzech pierwszych elementów kratownicy o schemacie pokazanym na rysunku. Bloki **J** zapisać z dokładnością do 1 kN/m .



EA=27000kN

Rozwiązanie:
Składowe macierzy $\mathbf{K}^e$ elementów kratownicy i bloków $\mathbf{J}^e$ obliczamy na podstawie równań:

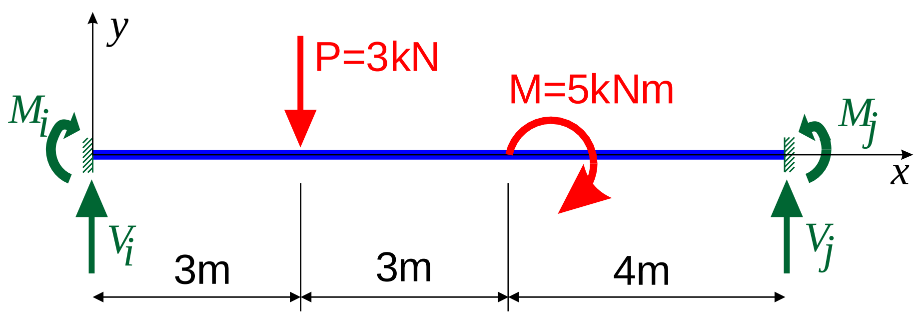
$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^e & -\mathbf{J}^e \\ -\mathbf{J}^e & \mathbf{J}^e \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^e = EA/L^3 \begin{bmatrix} (L_X)^2 & L_X L_Y \\ L_X L_Y & (L_Y)^2 \end{bmatrix}$$

Bloki $\mathbf{J}^e$ elementów kratownicy:

$$\mathbf{J}^1 = \begin{bmatrix} 2571 & 2057 \\ 2057 & 1646 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^2 = \begin{bmatrix} 6183 & 3297 \\ 3297 & 1759 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^3 = \begin{bmatrix} 6428 & -5142 \\ -5142 & 4114 \end{bmatrix}$$

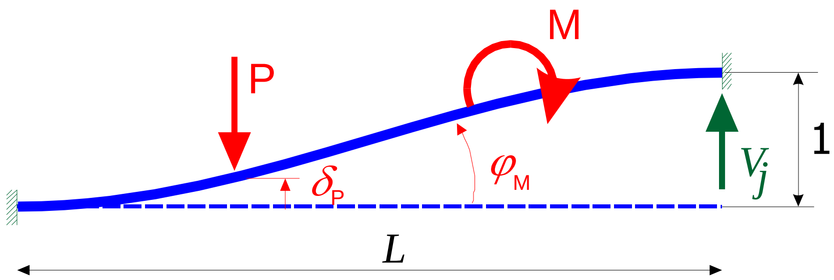
Zadanie 2 (1pkt.)

Obliczyć reakcję V_j belki o schemacie pokazanym na rysunku. Zastosować zasadę prac wirtualnych. Znaleźć współczynniki wielomianu Hermite'a, który jest funkcją kształtu belki.



Rozwiązanie:
Poszukujemy funkcji ugięcia belki w postaci wielomianu 3-go stopnia: $y=Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.
Zakładamy przemieszczenie podpory j o jednostkę w kierunku działania poszukiwanej reakcji V_j .
Współczynniki wielomianu można znaleźć po rozwiązaniu układu równań otrzymanego po uwzględnieniu warunków brzegowych:

- $x = 0, y = 0$
- $x = 0, y' = dy/dx = 0$
- $x = L, y = 1$
- $x = L, y' = dy/dx = 0$.



Po podstawieniu warunków brzegowych do równania $y=Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ otrzymamy:

- $y(0)=D = 0$
- $y'(0)= C = 0$
- $y(L)= A L^3 + B L^2 = 1$
- $y'(L)= 3A L^2 + 2B L = 0$

Po rozwiązaniu otrzymamy:
$A = -2/L^3$, $B = 3/L^2$, $C = 0$, $D = 0$,
$y(x)= -2 (x/L)^3 + 3 (x/L)^2$, lub $y(\xi)=\xi^2 (3 -2 \xi)$,
$y'(x)=[-6 (x/L)^2 + 6 (x/L)]/L$, lub $y'(\xi)=6\xi (1 - \xi)/L$, gdzie $\xi = x/L$

Przesunięcie punktu działania siły wynosi: $\delta_P = y(\xi_P)$.
Obrót belki w miejscu działania momentu wynosi: $\varphi_M = y'(\xi_M)$.

W zadaniu dane są:
$P = 3\text{kN}$, $M = 5\text{kNm}$, $L = 10\text{m}$, $x_P = 3\text{m}$, $\xi_P = 3/10$, $x_M = 6\text{m}$, $\xi_M = 6/10$.

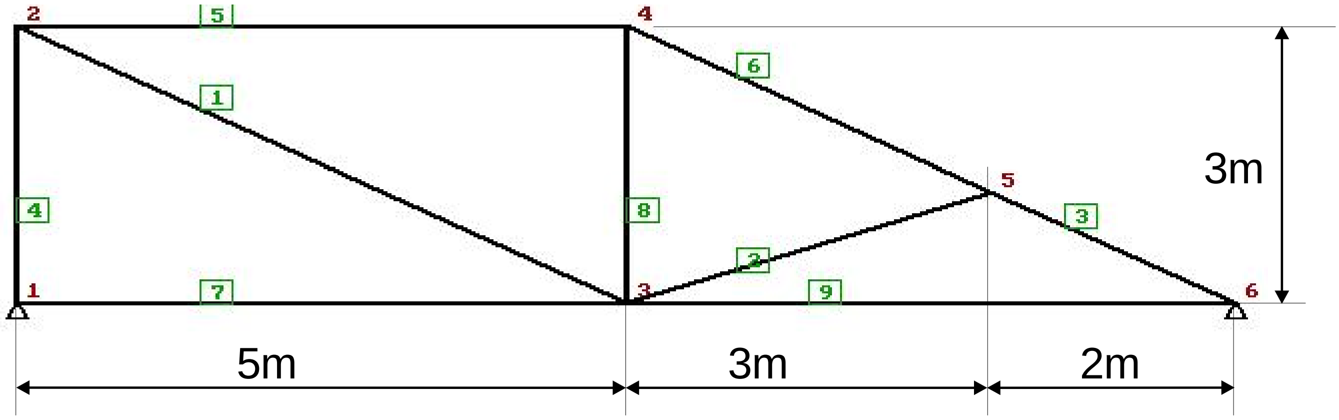
Obliczamy przemieszczenia:
$\delta_P = y(\xi_P) = (\xi_P)^2 (3 - 2 \xi_P) = (0,3)^2 (3 - 2 \cdot 0,3) = 0,2160$,
$\varphi_M = y'(\xi_M) = 6\xi_M (1 - \xi_M)/10\text{m} = 6 \cdot 0,6 (1 - 0,6)/10\text{m} = 0,1440/\text{m}$.

Zapiszemy równanie pracy sił na przesunięciu wirtualnym:
$-P\, \delta_P - M\, \varphi_M + V_j\, 1 = 0$,
praca siły P i momentu M jest ujemna, bo wektor siły jest przeciwnie skierowany względem przesunięcia δ_P a wektor momentu względem obrotu φ_M ,
stąd $V_j = P\, \delta_P + M\, \varphi_M$.

Po podstawieniu danych mamy:
$V_j = 3\text{kN} \cdot 0,2160 + 5\text{kNm} \cdot 0,1440/\text{m} = 1,3680\text{kN}$

Grupa 1B

Zadanie 1 (1pkt.)
Znaleźć bloki **J** macierzy sztywności trzech pierwszych elementów kratownicy o schemacie pokazanym na rysunku. Bloki **J** zapisać z dokładnością do 1 kN/m .



EA=27000kN

Rozwiązanie:
Składowe macierzy $\mathbf{K}^e$ elementów kratownicy i bloków $\mathbf{J}^e$ obliczamy na podstawie równań:

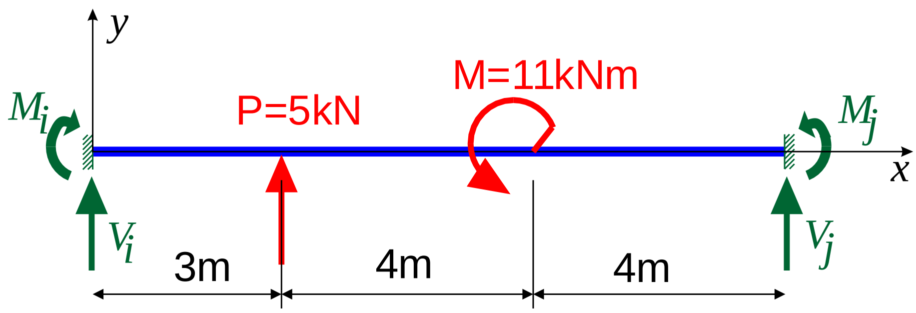
$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^e & -\mathbf{J}^e \\ -\mathbf{J}^e & \mathbf{J}^e \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^e = EA/L^3 \begin{bmatrix} (L_X)^2 & L_X L_Y \\ L_X L_Y & (L_Y)^2 \end{bmatrix}$$

Bloki $\mathbf{J}^e$ elementów kratownicy:

$$\mathbf{J}^1 = \begin{bmatrix} 3405 & -2043 \\ -2043 & 1226 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^2 = \begin{bmatrix} 7204 & 2881 \\ 2881 & 1153 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^3 = \begin{bmatrix} 8512 & -5107 \\ -5107 & 3064 \end{bmatrix}$$

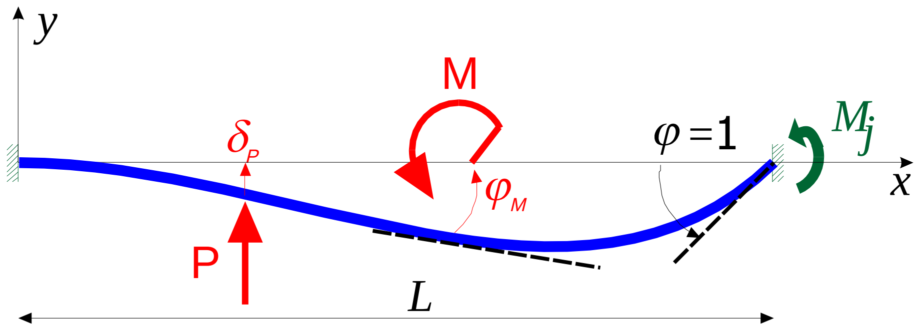
Zadanie 2 (1pkt.)

Obliczyć moment podporowy M_j belki o schemacie pokazanym na rysunku. Zastosować zasadę prac wirtualnych. Znaleźć współczynniki wielomianu Hermite'a, który jest funkcją kształtu belki.



Rozwiązanie:
Poszukujemy funkcji ugięcia belki w postaci wielomianu 3-go stopnia: $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.
Zakładamy obrót podpory j o kąt jednostkowy w kierunku działania poszukiwanego momentu M_j .
Współczynniki wielomianu można znaleźć po rozwiązaniu układu równań otrzymanego po uwzględnieniu warunków brzegowych:

- $x = 0, y = 0$
- $x = 0, y' = dy/dx = 0$
- $x = L, y = 0$
- $x = L, y' = dy/dx = 1.$



Po podstawieniu warunków brzegowych do równania $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ otrzymamy:

- $y(0) = D = 0$
- $y'(0) = C = 0$
- $y(L) = A\,L^3 + B\,L^2 = 0$
- $y'(L) = 3A\,L^2 + 2B\,L = 1$

Po rozwiązaniu otrzymamy:
$A = 1/L^2$, $B = -1/L$, $C = 0$, $D = 0$,
$y(x) = [(x/L)^3 - (x/L)^2]L$, lub $y(\xi) = -\xi^2 (1 - \xi)\,L$,
$y'(x) = [3(x/L)^2 - 2x/L]$, lub $y'(\xi) = \xi\,(3\xi - 2)$, gdzie $\xi = x/L$

Przesunięcie punktu działania siły wynosi: $\delta_P = y(\xi_P)$.
Obrót belki w miejscu działania momentu wynosi: $\varphi_M = y'(\xi_M)$.

W zadaniu dane są:
$P = 5\text{kN}$, $M = 11\text{kNm}$, $L = 11\text{m}$, $x_P = 3\text{m}$, $\xi_P = 3/11$, $x_M = 7\text{m}$, $\xi_M = 7/11$.

Obliczamy przemieszczenia:
$\delta_P = y(\xi_P) = -(\xi_P)^2\,(1 - \xi_P)L = -\,(3/11)^2\,(1 - 3/11)\cdot 11\text{m} = -72\text{m}/121 \approx -0{,}5950\text{m}$,
$\varphi_M = y'(\xi_M) = \xi_M\,(3\xi_M - 2)\text{m} = 7/11\cdot(3\cdot 7/11 - 2) = -7/121 \approx -0{,}05785$.

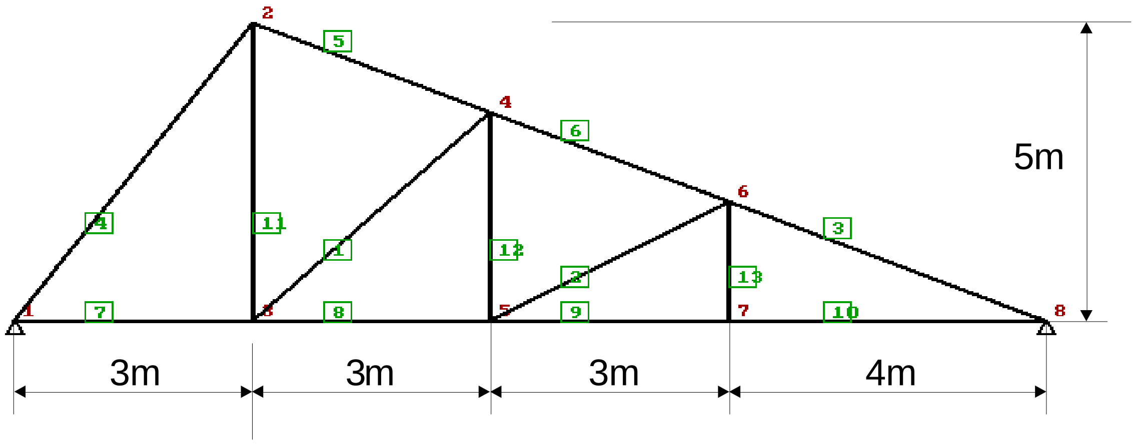
Zapiszemy równanie pracy sił na przesunięciu wirtualnym:
$P\,\delta_P + M\,\varphi_M + M_j\,1 = 0$,
praca siły P i momentu M jest dodatnia, bo wektor siły jest skierowany zgodnie z kierunkiem przesunięcia δ_P a wektor momentu zgodnie z kątem obrotu φ_M ,
stąd $M_j = -P\,\delta_P - M\,\varphi_M$.

Po podstawieniu danych mamy:
$M_j = -5\text{kN}\cdot(-72/121)\text{m} - 11\text{kNm}\cdot(-7/121) = 437/121\text{kNm} \approx 3{,}6116\text{kNm}$

Grupa 2A

Zadanie 1 (1pkt.)

Znaleźć bloki **J** macierzy sztywności trzech pierwszych elementów kratownicy o schemacie pokazanym na rysunku. Bloki **J** zapisać z dokładnością do 1 kN/m .



EA=27000kN

Rozwiązanie:

Składowe macierzy $\mathbf{K}^e$ elementów kratownicy i bloków $\mathbf{J}^e$ obliczamy na podstawie równań:

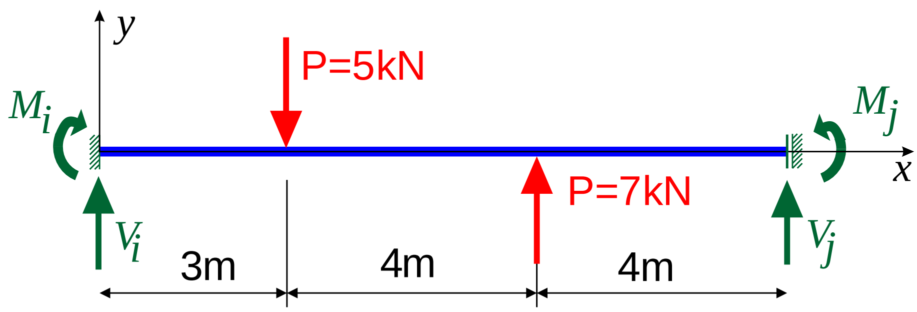
$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^e & -\mathbf{J}^e \\ -\mathbf{J}^e & \mathbf{J}^e \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^e = EA/L^3 \begin{bmatrix} (L_X)^2 & L_X L_Y \\ L_X L_Y & (L_Y)^2 \end{bmatrix}$$

Bloki $\mathbf{J}^e$ elementów kratownicy:

$$\mathbf{J}^1 = \begin{bmatrix} 2481 & 2894 \\ 2894 & 3376 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^2 = \begin{bmatrix} 5184 & 3456 \\ 3456 & 2304 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^3 = \begin{bmatrix} 4830 & -2415 \\ -2415 & 1207 \end{bmatrix}$$

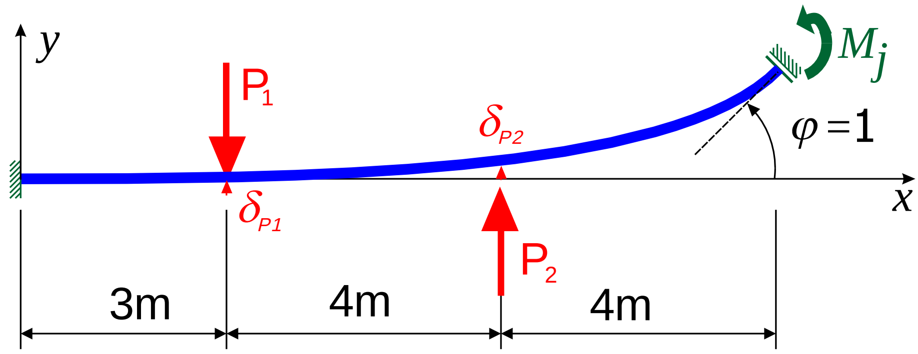
Zadanie 2 (1pkt.)

Obliczyć moment podporowy M_j belki o schemacie pokazanym na rysunku. Zastosować zasadę prac wirtualnych. Znaleźć współczynniki wielomianu Hermite'a, który jest funkcją kształtu belki.



Rozwiązanie:
Poszukujemy funkcji ugięcia belki w postaci wielomianu 3-go stopnia: $y=Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.
Zakładamy obrót podpory j o kąt jednostkowy w kierunku działania poszukiwanego momentu M_j .
Współczynniki wielomianu można znaleźć po rozwiązaniu układu równań otrzymanego po uwzględnieniu warunków brzegowych:

- $x = 0, y = 0$
- $x = 0, y' = dy/dx = 0$
- $x = L, y' = dy/dx = 1.$
- $x = L,\ y''' = 0$



Po podstawieniu warunków brzegowych do równania $y=Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ otrzymamy:

- $y(0)=D = 0$
- $y'(0)= C = 0$
- $y'(L)= 3A\,L^2 + 2B\,L = 1$
- $y'''(L)=6\,A = 0$

Po rozwiązaniu otrzymamy:
$A = 0$, $B = 1/(2L)$, $C = 0$, $D = 0$,
$y(x)= x^2/(2L)$, lub $y(\xi)= L\xi^2$,
$y'(x)=x/L$, lub $y'(\xi)=L\xi$, gdzie $\xi = x/L$

Przesunięcie punktu działania siły P_1 wynosi: $\delta_{P1} = y(\xi_{P1})$.
Przesunięcie punktu działania siły P_2 wynosi: $\delta_{P2} = y(\xi_{P2})$.

W zadaniu dane są:
$P_1 = 5\text{kN}$, $P_2 = 7\text{kN}$, $L = 11\text{m}$, $x_{P1} = 3\text{m}$, $\xi_{P1} = 3/11$, $x_{P2} = 7\text{m}$, $\xi_{P2} = 7/11$.

Obliczamy przemieszczenia:
$\delta_{P1} = y(\xi_{P1}) = L(\xi_{P1})^2 = 11\cdot (3/11)^2\ \text{m} = 9\text{m}/11 \approx 0.81818\text{m}$,
$\delta_{P2} = y(\xi_{P2}) = L(\xi_{P2})^2 = 11\cdot (7/11)^2\ \text{m} = 49\text{m}/11 \approx 4,4545\text{m}$.

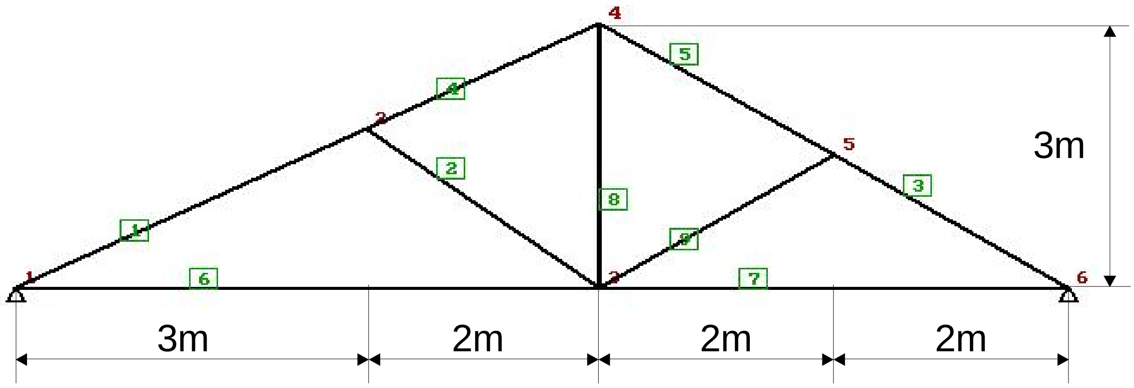
Zapiszemy równanie pracy sił na przesunięciu wirtualnym:
$-P_1\,\delta_{P1} + P_2\,\delta_{P2} + M_j\,1 = 0$,
praca siły P_1 jest ujemna, bo wektor siły jest skierowany przeciwnie względem wektora przemieszczenia δ_{P1} a praca siły P_2 jest dodatnia bo wektory siły i przemieszczenia δ_{P2} mają zwroty zgodne,
stąd $M_j = P_1\,\delta_{P1} - P_2\,\delta_{P2}$.

Po podstawieniu danych mamy:
$M_j = 5\text{kN}\cdot(9/11)\text{m} - 7\text{kN}\cdot(49/11)\text{m} = -(298/11)\text{kNm} \approx -27{,}091\text{kNm}$

Grupa 2B

Zadanie 1 (1pkt.)

Znaleźć bloki **J** macierzy sztywności trzech pierwszych elementów kratownicy o schemacie pokazanym na rysunku. Bloki **J** zapisać z dokładnością do 1 kN/m .



EA=27000kN

Rozwiązanie:

Składowe macierzy $\mathbf{K}^e$ elementów kratownicy i bloków $\mathbf{J}^e$ obliczamy na podstawie równań:

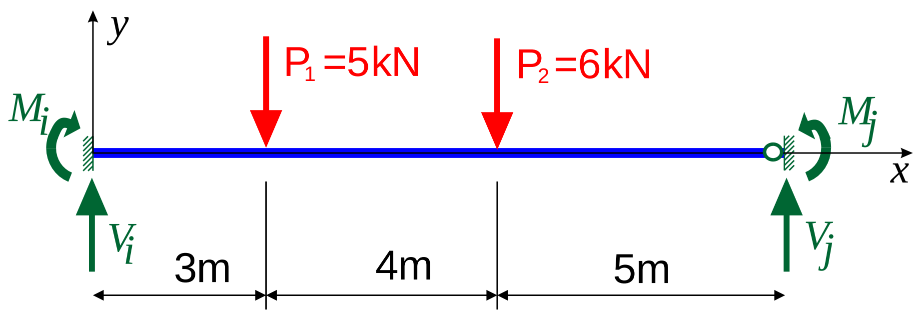
$$\mathbf{K}^e = \boxed{\begin{matrix} \mathbf{J}^e & -\mathbf{J}^e \\ -\mathbf{J}^e & \mathbf{J}^e \end{matrix}} \qquad \mathbf{J}^e = EA/L^3 \boxed{\begin{matrix} (L_X)^2 & L_X L_Y \\ L_X L_Y & (L_Y)^2 \end{matrix}}$$

Bloki $\mathbf{J}^e$ elementów kratownicy:

$$\mathbf{J}^1 = \boxed{\begin{matrix} 5675 & 3405 \\ 3405 & 2043 \end{matrix}} \qquad \mathbf{J}^2 = \boxed{\begin{matrix} 5544 & -4990 \\ -4990 & 4491 \end{matrix}} \qquad \mathbf{J}^3 = \boxed{\begin{matrix} 6912 & -5184 \\ -5184 & 3888 \end{matrix}}$$

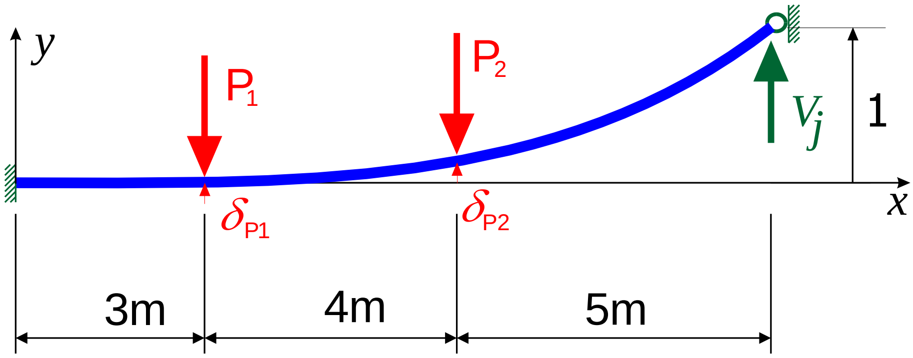
Zadanie 2 (1pkt.)

Obliczyć reakcję podporową V_j belki o schemacie pokazanym na rysunku. Zastosować zasadę prac wirtualnych. Znaleźć współczynniki wielomianu Hermite'a, który jest funkcją kształtu belki.



Rozwiązanie:
Poszukujemy funkcji ugięcia belki w postaci wielomianu 3-go stopnia: $y=Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.
Zakładamy przesunięcie podpory j o jednostkę w kierunku działania poszukiwanej reakcji V_j .
Współczynniki wielomianu można znaleźć po rozwiązaniu układu równań otrzymanego po uwzględnieniu warunków brzegowych:

- $x = 0, y = 0$
- $x = 0, y' = dy/dx = 0$
- $x = L, y = 1$
- $x = L, y'' = dy/dx = 0.$



Po podstawieniu warunków brzegowych do równania $y=Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ otrzymamy:

- $y(0)=D = 0$
- $y'(0)= C = 0$
- $y(L)= A\,L^3 + B\,L^2 = 1$
- $y''(L)= 6AL + 2B = 0$

Po rozwiązaniu otrzymamy:
$A = -1/(2L^3)$, $B = 3/(2L^2)$, $C = 0$, $D = 0$,
$y(x)= [-(x/L)^3 + 3(x/L)^2]/2$, lub $y(\xi)=\xi^{\,2}\,(3 - \xi)/2$,
$y'(x)=[\,-3(x/L)^2 + 6x/L]/L$, lub $y'(\xi)=\xi\,(6 - 3\xi)$, gdzie $\xi = x/L$

Przesunięcie punktu działania siły P_1 wynosi: $\delta_{P1} = y(\xi_{P1})$.
Przesunięcie punktu działania siły P_2 wynosi: $\delta_{P2} = y(\xi_{P2})$.

W zadaniu dane są:
$P_1 = 5\text{kN}$, $P_2 = 6\text{kN}$, $L = 12\text{m}$, $x_{P1} = 3\text{m}$, $\xi_{P1} = 3/12$, $x_{P2} = 7\text{m}$, $\xi_{P2} = 7/12$.

Obliczamy przemieszczenia:
$\delta_{P1} = y(\xi_{P1}) = (\xi_{\,P1})^2\,(3 - \xi_{\,P1})/2 = (3/12)^2\cdot\,(3- 3/12) = 11/64 \approx 0{,}171875$,
$\delta_{P2} = y(\xi_{P2}) = (\xi_{\,P2})^2\,(3 - \xi_{\,P2})/2 = (7/12)^2\cdot\,(3- 7/12) = 1421/1728 \approx 0{,}822338$.

Zapiszemy równanie pracy sił na przesunięciu wirtualnym:
$-P_1\,\delta_{P1} - P_2\,\delta_{P2} + V_j\,1 = 0$,
praca obu sił jest ujemna, bo wektory sił są skierowany przeciwnie względem wektorów przemieszczenia δ_{P1} i δ_{P2},
stąd $V_j = P_1\,\delta_{P1} + P_2\,\delta_{P2}$.

Po podstawieniu danych mamy:
$V_j = 5\text{kN} \cdot 11/64 + 7\text{kN} \cdot 1421/1728 = 3337/576\text{kN} \approx 5{,}79340\text{kN}$