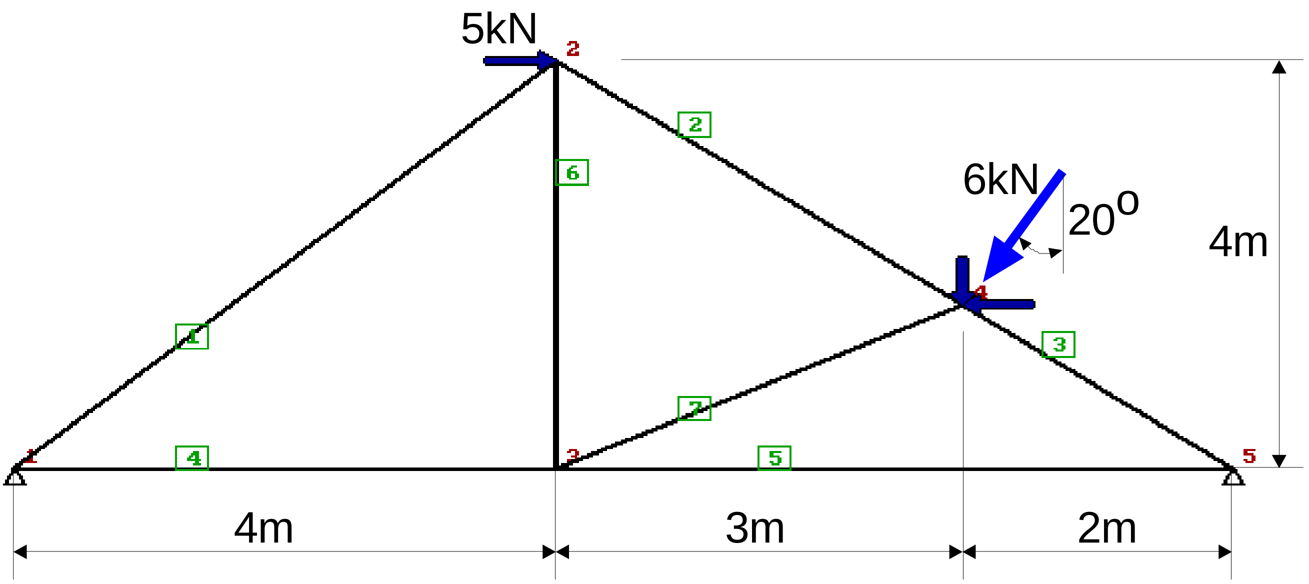
MUZ 2 egzamin 6.02.2010

Zadanie 1 (5pkt.)
Znaleźć bloki **J** macierzy sztywności elementów kratownicy o schemacie pokazanym na rysunku. Zapisać górny trójkąt $\mathbf{K}^g$ macierzy sztywności kratownicy oraz modyfikację macierzy **K**, która pozwala uwzględnić warunki brzegowe. Zapisać wektor sił węzłowych **p** (wektor „prawej strony”) i jego postać po uwzględnieniu warunków brzegowych $\mathbf{p}^p$. Bloki **J** zapisać z dokładnością do 0.1 kN/m a macierze **K** z dokładnością do 1 kN/m



EA=31000kN

Rozwiązanie:

Składowe macierzy $\mathbf{K}^e$ elementów kratownicy i bloków $\mathbf{J}^e$ obliczamy na podstawie równań:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^e & -\mathbf{J}^e \\ -\mathbf{J}^e & \mathbf{J}^e \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^e = EA/L^3 \begin{bmatrix} (L_X)^2 & L_X L_Y \\ L_X L_Y & (L_Y)^2 \end{bmatrix}$$

Bloki **J** elementów kratownicy:

$$\mathbf{J}^1 = \begin{bmatrix} 2740.0 & 2740.0 \\ 2740.0 & 2740.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^2 = \begin{bmatrix} 4920.1 & -3936.1 \\ -3936.1 & 3148.9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^3 = \begin{bmatrix} 7380.2 & -5904.1 \\ -5904.1 & 4723.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^4 = \begin{bmatrix} 7750.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}^5 = \begin{bmatrix} 6200.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^6 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 7750.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^7 = \begin{bmatrix} 7098.5 & 3785.9 \\ 3785.9 & 2019.1 \end{bmatrix}$$

Schemat agregacji macierzy sztywności (kolorem niebieskim zaznaczono górne półpasmo macierzy):

K=

$\mathbf{J}^1 + \mathbf{J}^4$	$-\mathbf{J}^1$	$-\mathbf{J}^4$		
$-\mathbf{J}^1$	$\mathbf{J}^1 + \mathbf{J}^2 + \mathbf{J}^6$	$-\mathbf{J}^6$	$-\mathbf{J}^2$	
$-\mathbf{J}^4$	$-\mathbf{J}^6$	$\mathbf{J}^4 + \mathbf{J}^5 + \mathbf{J}^6 + \mathbf{J}^7$	$-\mathbf{J}^7$	$-\mathbf{J}^5$
	$-\mathbf{J}^2$	$-\mathbf{J}^7$	$\mathbf{J}^2 + \mathbf{J}^3 + \mathbf{J}^7$	$-\mathbf{J}^3$
		$-\mathbf{J}^5$	$-\mathbf{J}^3$	$\mathbf{J}^3 + \mathbf{J}^5$

Przesunięte górne półpasmo macierzy sztywności:

$\mathbf{K}^{g}_{pasm}$ =

10490	2740	-2740	-2740	-7750	0
2740	-2740	-2740	0	0	0
7660	-1196	0	0	-4920	3936
13639	0	-7750	3936	-3149	0
21049	3786	-7099	-3786	-6200	0
9769	-3786	-2019	0	0	
19399	-6054	-7380	5904		
9891	5904	-4723			
13580	-5904				
4723					

p =

0.000
0.000
5.000
0.000
0.000
0.000
-2.052
-5.638
0.000
0.000

Schemat modyfikacji macierzy sztywności:

$\mathbf{K}_{mod}$ =

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	.	.	.	.	.	.	0	0
0	0	.	.	.	.	.	.	0	0
0	0	.	.	.	.	.	.	0	0
0	0	.	.	.	.	.	.	0	0
0	0	.	.	.	.	.	.	0	0
0	0	.	.	.	.	.	.	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Modyfikacja wektora **p**

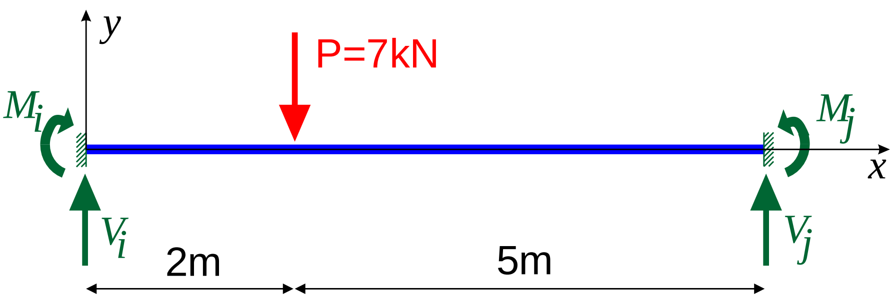
$\mathbf{p}^{p}$=

0.000
0.000
5.000
0.000
0.000
0.000
-2.052
-5.638
0.000
0.000

Zmodyfikowane wiersze zaznaczono kolorem fioletowym, obszar niezmieniony zaznaczono szarym tłem.

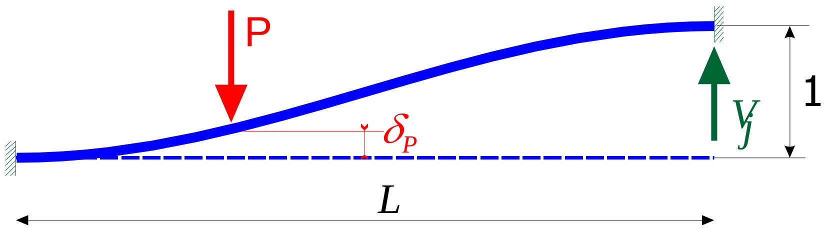
Zadanie 2 (2pkt.)

Obliczyć reakcję V_j belki o schemacie pokazanym na rysunku. Zastosować zasadę prac wirtualnych. Znaleźć współczynniki wielomianu Hermite'a, który jest funkcją kształtu belki.



Rozwiązanie:
Poszukujemy funkcji ugięcia belki w postaci wielomianu 3-go stopnia: $y=Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.
Zakładamy przemieszczenie podpory j o jednostkę w kierunku działania poszukiwanej reakcji V_j .
Współczynniki wielomianu można znaleźć po rozwiązaniu układu równań otrzymanego po uwzględnieniu warunków brzegowych:

- $x = 0, y = 0$
- $x = 0, y' = dy/dx = 0$
- $x = L, y = 1$
- $x = L, y' = dy/dx = 0.$



Po podstawieniu warunków brzegowych do równania $y=Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ otrzymamy:

- $y(0)=D = 0$
- $y'(0)= C = 0$
- $y(L)= A\,L^3 + B\,L^2 = 1$
- $y'(L)= 3A\,L^2 + 2B\,L = 0$

Po rozwiązaniu otrzymamy:
$A = -2/L^3$, $B = 3/L^2$, $C = 0$, $D = 0$,
$y(x)= -2\,(x/L)^3 + 3\,(x/L)^2$, lub
$y(\xi)=\xi^2\,(3\ \ -2\,\xi)$, gdzie $\xi = x/L$

Przesunięcie punktu działania siły wynosi: $\delta_P = y(\xi_P)$
W zadaniu dane są:
$P = 7$kN, $L = 7$m, $x_P = 2$m, $\xi_P = 2/7$.

Zapiszemy równanie pracy sił na przesunięciu wirtualnym: $-P\,\delta_P + V_j\,1 = 0$ (praca siły P jest ujemna, bo wektor przesunięcia punktu przyłożenia siły ma przeciwny zwrot niż wektor siły),
a stąd $V_j = P\,\delta_P$.
Po podstawieniu danych mamy:
$V_j = 7\text{kN} \cdot (2/7)^2\,[3 -2\,(2/7)] = 7\text{kN} \cdot 68/343 \approx 1.387755\text{kN}$

Zadanie 3 (3pkt.)

Dana jest symetryczna, dodatnio określona macierz **A** , znaleźć macierz trójkątną dolną **L** taką, która spełnia równanie: **A** = **L** · **L**^{T} . Zadanie należy rozwiązać stosując metodę Banachiewicza-Choleskiego.

A =

10.000	1.000	-1.000	2.000
1.000	11.000	1.000	2.000
-1.000	1.000	15.000	1.000
2.000	2.000	1.000	14.000

Rozwiązanie:

Obliczamy składowe macierzy trójkątnej dolnej kolejno kolumnami od 1 do 4 i w każdej kolumnie od góry do dołu, czyli L_{11} , L_{21}, L_{31} , L_{41} , L_{22} , L_{32} , L_{42} , L_{33} , L_{43} , L_{44} .
Wyrazy znajdujące się na przekątnej obliczamy z równania:

$$L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}} \ .$$

Wyrazy L_{ij}, znajdujące się poniżej przekątnej obliczamy z równania:

$$L_{ij} = \left[A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} A_{ik} A_{jk} \right] \frac{1}{L_{jj}} \ .$$

L =

3.162			
0.316	3.302		
-0.316	0.333	3.846	
0.632	0.545	0.265	3.638