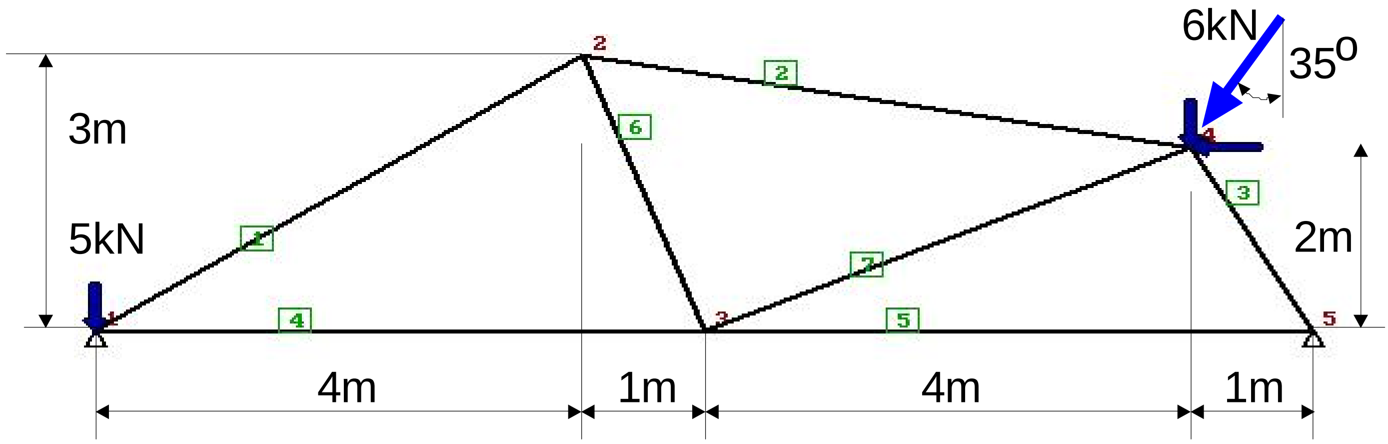
MUZ 2 egzamin 13.02.2010

Zadanie 1 (5pkt.)
Znaleźć bloki **J** macierzy sztywności elementów kratownicy o schemacie pokazanym na rysunku. Zapisać górny trójkąt $\mathbf{K}^g$ macierzy sztywności kratownicy oraz modyfikację macierzy **K** , która pozwala uwzględnić warunki brzegowe. Zapisać wektor sił węzłowych **p** (wektor „prawej strony”) i jego postać po uwzględnieniu warunków brzegowych $\mathbf{p}^p$. Bloki **J** zapisać z dokładnością do 0.1 kN/m a macierze **K** z dokładnością do 1 kN/m



EA=31000kN

Rozwiązanie

Bloki **J** elementów kratownicy:

Element 1

3968.0	2976.0
2976.0	2232.0

Element 2

5845.8	-1169.2
-1169.2	233.8

Element 3

2772.7	-5545.4
-5545.4	11090.9

Element 4

6200.0	0.0
0.0	0.0

Element 5

6200.0	0.0
0.0	0.0

Element 6

980.3	-2940.9
-2940.9	8822.8

Element 7

5545.4	2772.7
2772.7	1386.4

Element 8

0.0	0.0
0.0	0.0

Górne pasmo macierzy sztywności:

$\mathbf{K}^g_{pasm}$ =

10168	2976	-3968	-2976	-6200	
2232	-2976	-2232			
10794	-1134	-980	2941	-5846	1169
11289	2941	-8823	1169	-234	
18926	-168	-5545	-2773	-6200	
10209	-2773	-1386			
14164	-3942	-2773	5545		
12711	5545	-11091			
8973	-5545				
11091					

p =

0.000
-5.000
0.000
0.000
0.000
0.000
-3.441
-4.915
0.000
0.000

Schemat modyfikacji macierzy sztywności:

$$\mathbf{K}_{mod} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

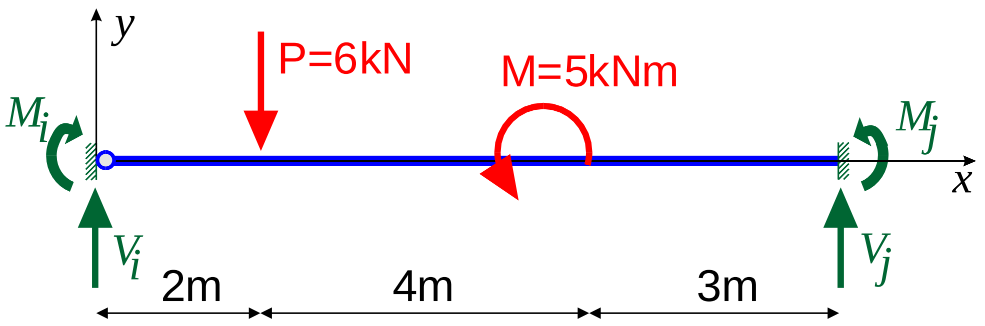
Modyfikacja wektora **p**

$$\mathbf{p}^{p} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ -5.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ -3.441 \\ -4.915 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Zmodyfikowane wiersze zaznaczono kolorem fioletowym.

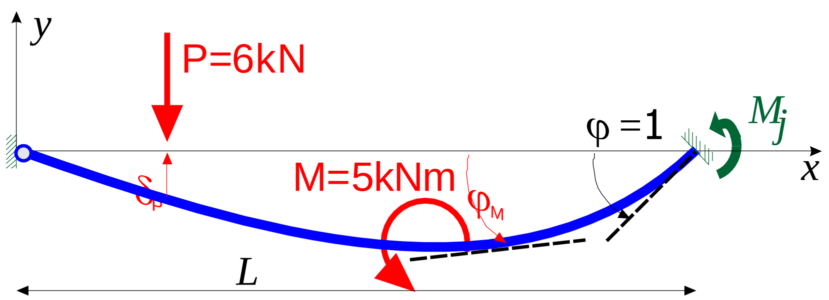
Zadanie 2 (2pkt.)

Obliczyć moment podporowy M_j belki o schemacie pokazanym na rysunku. Zastosować zasadę prac wirtualnych. Znaleźć współczynniki wielomianu Hermite'a, który jest funkcją kształtu belki.



Rozwiązanie:
Poszukujemy funkcji ugięcia belki w postaci wielomianu 3-go stopnia: $y=Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.
Zakładamy przemieszczenie podpory j o kąt jednostkowy w kierunku działania poszukiwanego momentu M_j .
Współczynniki wielomianu można znaleźć po rozwiązaniu układu równań otrzymanego po uwzględnieniu warunków brzegowych:

- $x = 0, y = 0$
- $x = 0, y'' = d^2y/dx^2 = 0$
- $x = L, y = 0$
- $x = L, y' = dy/dx = 1.$



Po podstawieniu warunków brzegowych do równania $y=Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ otrzymamy:

- $y(0)=D = 0$ $\quad$ $y''(0)=2B = 0$
- $y(L)= A\,L^3 + C\,L = 0$ $\quad$ $y'(L)= 3A\,L^2 + CL =1$

Po rozwiązaniu otrzymamy:
$A = 1/(2L^2)$, $B = 0$, $C = -1/2$, $D = 0$,
$y(x)= L/2\,[(x/L)^3 - x/L]$, lub $y(\xi) = L\xi/2\,(\xi^2 - 1)$,
$y'(x)= 1/2\,[(x/L)^2 - 1]$, lub $y'(\xi)=1/2\,(3\xi^2 -1)$, gdzie $\xi = x/L$

Przesunięcie punktu działania siły wynosi: $\delta_P = y(\xi_P)$
Kąt obrotu belki w punkcie działania momentu skupionego wynosi: $\varphi_M = y'(\xi_M)$

W zadaniu dane są:
$P = -6$kN, $M = 5$kNm, $L = 9$m, $x_P = 2$m, $\xi_P = 2/9$, $x_M = 6$m, $\xi_M = 6/9$.

Obliczamy przemieszczenia:
$\delta_P = y(\xi_P) = -9\text{m}\,(2/9)\,½\,[(2/9)^2 - 1] \approx -0{,}9506\text{m}$,
$\varphi_M = y'(\xi_M) = ½\,[3\cdot(6/9)^2 - 1] \approx 0{,}1667$.

Zapiszemy równanie pracy sił na przesunięciu wirtualnym: $P\,\delta_P + M\,\varphi_M + M_j\,1 = 0$,
a stąd $M_j = -P\,\delta_P - M\,\varphi_M$.
Po podstawieniu danych mamy:
$M_j = -(-6\text{kN})\cdot(-0{,}9506\text{m}) - 5\text{kNm}\cdot(0{,}1667) \approx -6.537\text{kNm}$

Zadanie 3 (3pkt.)

Dana jest symetryczna, dodatnio określona macierz **A** , znaleźć macierz trójkątną dolną **L** taką, która spełnia równanie: $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^{T}$. Zadanie należy rozwiązać stosując metodę Banachiewicza-Choleskiego.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10.000 & -1.000 & 2.000 & 1.000 \\ -1.000 & 12.000 & -2.000 & 1.000 \\ 2.000 & -2.000 & 15.000 & 3.000 \\ 1.000 & 3.000 & 1.000 & 16.000 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Obliczamy składowe macierzy trójkątnej dolnej kolejno kolumnami od 1 do 4 i w każdej kolumnie od góry do dołu, czyli L_{11} , L_{21}, L_{31} , L_{41} , L_{22} , L_{32} , L_{42} , L_{33} , L_{43} , L_{44} .
Wyrazy znajdujące się na przekątnej obliczamy z równania:

$$L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}} \ .$$

Wyrazy L_{ij}, znajdujące się poniżej przekątnej obliczamy z równania:

$$L_{ij} = \left[A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} A_{ik} A_{jk} \right] \frac{1}{L_{jj}} \ .$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3.162 & & & \\ -0.316 & 3.450 & & \\ 0.632 & -0.522 & 3.785 & \\ 0.316 & 0.319 & 0.784 & 3.897 \end{bmatrix}$$