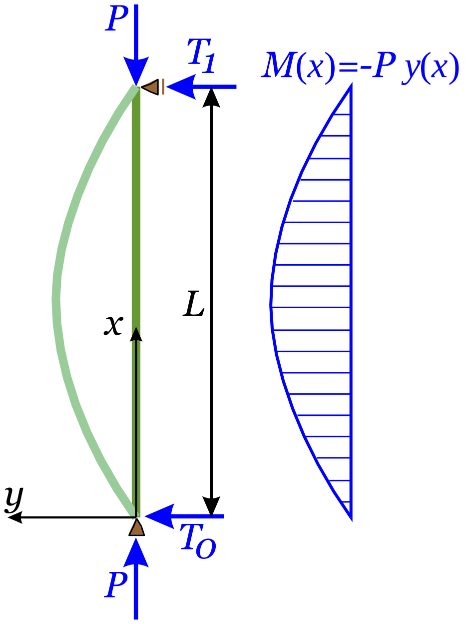
1. Obliczenie siły krytycznej w swobodnie podpartym słupie ściskanym



Warunki brzegowe:

1) $y(0)=0$
2) $M(0)=0$
3) $y(L)=0$
4) $M(L)=0$

Ponieważ $M(x)=P\,y(x)$,
to warunek 2 jest tożsamy z warunkiem 1,
a warunek 4 z warunkiem 3

$T_0=0$, $T_1=0$

Równanie ugięcia pręta: $\frac{1}{\rho}=\frac{M(x)}{EJ}$ *zakładając małe kąty obrotu osi pręta* $\frac{dy}{dx} << 1$,

upraszczamy do postaci: $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EJ}$.

Podstawiając $M(x)=-P\,y(x)$ otrzymujemy równanie różniczkowe: $\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$, *gdzie* $k^2=\frac{P}{EJ}$.

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja: $y = A\sin kx + B\cos kx$, *gdzie stałe A i B należy wyznaczyć z warunków brzegowych.*
Z warunku nr 1 mamy: $y(0) = A \sin k{\cdot}0 + B \cos k{\cdot}0 = 0$, *co daje* $B = 0$.
Warunek nr 3 daje równanie $y(L) = A \sin k{\cdot}L = 0$, *które ma dwa rozwiązania:*

- $A = 0$, *które jest rozwiązaniem trywialnym gdyż w tym przypadku* $y(x) = 0$, *oraz*
- $\sin kL = 0$, *czyli* $kL = n\pi$.

Rozwiązanie drugie wobec różnego od zera ugięcia daje nam wartość siły krytycznej:

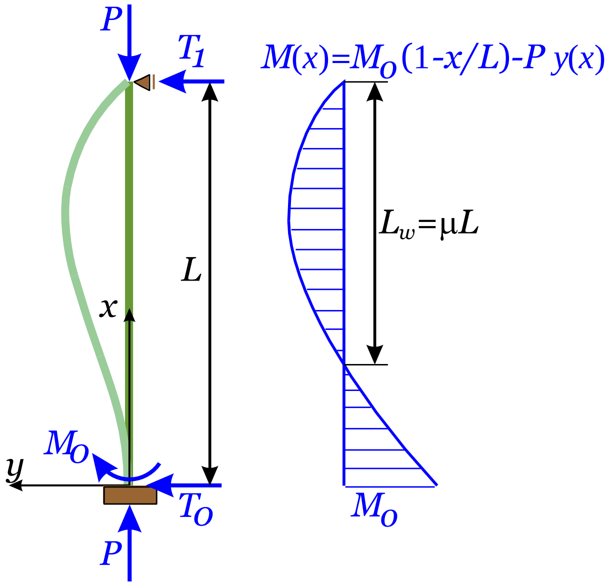
$P_{kr}=\frac{\pi^2 EJ}{L^2}$, *gdzie przyjęto najmniejszą możliwą wartość $n=1$, gdyż dla $n=0$ otrzymujemy znowu rozwiązanie trywialne, a dla $n>1$ otrzymujemy wyższą wartość siły powodującej wyboczenie.*
Efektem uproszczonej postaci równania różniczkowego ugięcia jest brak możliwości wyznaczenia stałej A, występującej w funkcji ugięcia $y=A \sin kx$. Wiemy jedynie, że w momencie wyboczenia $A \neq 0$.
Zadanie wyznaczenia siły krytycznej w ściskanym pręcie przy założeniu małych ugięć rozwiązał w 1744r.

Leonard Euler, stąd siła ta nazywana jest siłą eulerowską $P_E = P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$.

Przy założeniu dużych ugięć zadanie rozwiązał w 1770r. Lagrange, który obliczył ugięcie spowodowane siłą P większą od siły P_E :

$$\lambda = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\delta\lambda)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 (\delta\lambda)^4 + \ldots \text{ , gdzie } \lambda = \sqrt{\frac{P}{P_E}},\ \ \delta = \pi\frac{y_{\max}}{L}$$

2. Obliczenie siły krytycznej w statycznie niewyznaczalnym słupie ściskanym



Warunki brzegowe:

1) $y(0)=0$
2) $\varphi(0)=0$
3) $y(L)=0$
4) $M(L)=0$

Ponieważ $M(L)=-P\,y(x)$, *to warunek 4 jest tożsamy z warunkiem 3*

$T_0=-T_1,\ T_1=M_0/L$

Podstawiając $M(x)=M_0(1-x/L)-P\,y(x)$ *otrzymujemy równanie różniczkowe ugięcia słupa:*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=\frac{M_0}{EJ}(1-x/L),\quad \text{gdzie } k^2=\frac{P}{EJ}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja: $y=A\sin kx+B\cos kx+Cx+D$, *gdzie stałe A, B, C i D należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Obliczamy pochodne funkcji y(x):*

$$\frac{dy}{dx}=k(A\cos kx-B\sin kx)+C$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-k^2(A\sin kx+B\cos kx)$$

Podstawiając te funkcje do równania różniczkowego ugięcia otrzymamy równanie:

$$-k^2(A\sin kx+B\cos kx)+k^2(A\sin kx+B\cos kx+Cx+D)=\frac{M_0}{EJ}(1-x/L),$$ *które po uproszczeniu daje*

$$k^2(Cx+D)=M_0(1-x/L),$$ *co pozwala obliczyć stałe C i D.*

$$C=-\frac{M_0}{PL},\quad D=\frac{M_0}{P}.$$

Warunek brzegowy nr 1 daje: $y(0)=B+D=0$, *a stąd* $B=-D=\dfrac{-M_0}{P}$

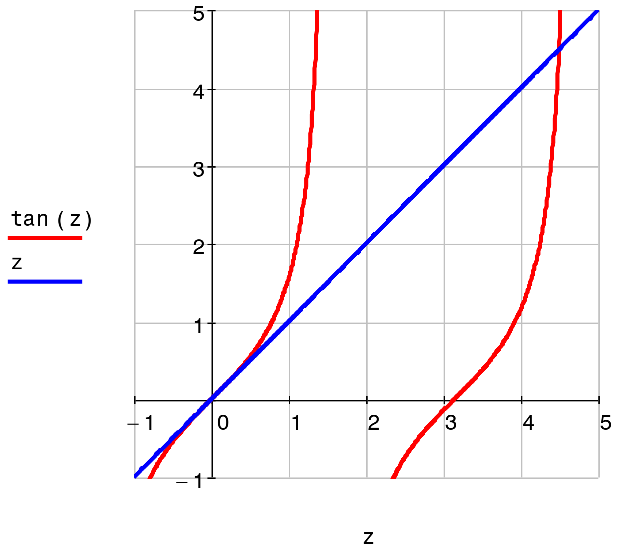
Warunek brzegowy nr 2 daje: $\varphi(0)\approx\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=kA+C=0$, *a stąd* $A=-C/k=\dfrac{M_0}{kPL}$

Warunek brzegowy nr 3 daje: $y(L)=\dfrac{M_0}{kPL}[\sin kL-kL\cos kL]=0$, *ponieważ wyrażenie przed nawiasem nie może być równe zeru to zerowanie wyrażenia w nawiasie prowadzi do równania:*

$\sin kL=kL\cos kL$, *lub* $\operatorname{tg} z=z$, $\quad z=kL$.

Najmniejsze nietrywialne rozwiązanie tego równania daje pierwiastek: $z=kL\approx 4{,}49340945790906...$

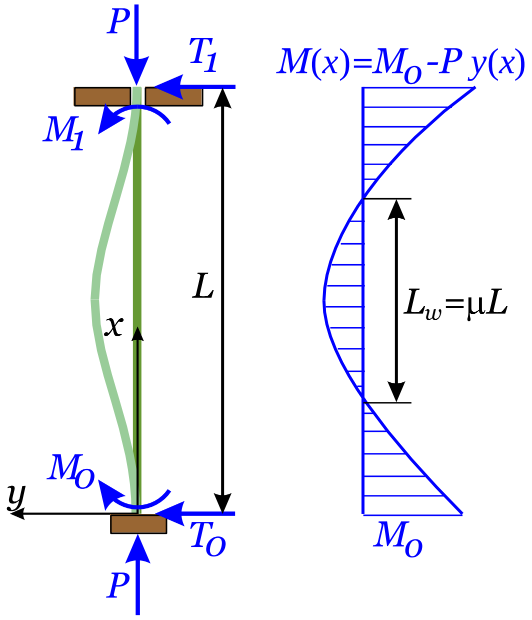
Siła wyboczeniowa jest w tym przypadku równa: $P_E\approx\dfrac{z^2EJ}{L^2}$.



Siłę eulerowską można przedstawić w tym przypadku w postaci podobnej do uprzednio pokazanej dla pręta swobodnie podpartego: $P_E = \dfrac{\pi^2 EJ}{L_w^{\;2}}$ *gdzie* $L_w = \mu L$, $\mu = \pi/z \approx 0{,}69915565964284$

Zredukowana długość pręta L_w *nosi nazwę "długości wyboczeniowej". Współczynnik* μ *– redukujący długość pręta występuje w podręcznikach z wartościami różnie zaokrąglonymi, często ze znakiem równości, co nie wydaje się poprawne, lepiej więc będzie zapisać go w postaci nierówności:* $0{,}699 < \mu < 0{,}7$.

3. Obliczenie siły krytycznej w statycznie niewyznaczalnym słupie ściskanym



Warunki brzegowe:

1) $y(0)=0$
2) $\varphi(0)=0$
3) $y(L)=0$
4) $\varphi(L)=0$

Z warunku równowagi mamy: $T_0=-T_1$
Ze względu na symetrię układu $M_0=M_1$,
więc $T_1=0$ *oraz* $T_0=0$.

Podstawiając $M(x)=M_0-P\,y(x)$ *otrzymujemy równanie różniczkowe ugięcia słupa:* $\dfrac{d^2y}{dx^2}+k^2y=\dfrac{M_0}{EJ}$,

gdzie $k^2=\dfrac{P}{EJ}$.

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja: $y=A\sin kx+B\cos kx+C$, *gdzie stałe A, B, C należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Obliczamy pochodne funkcji y(x):*

$$\frac{dy}{dx}=k(A\cos kx-B\sin kx)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-k^2(A\sin kx+B\cos kx)$$

Podstawiając te funkcje do równania różniczkowego ugięcia otrzymamy równanie:

$-k^2(A\sin kx+B\cos kx)+k^2(A\sin kx+B\cos kx+C)=\dfrac{M_0}{EJ}$, *które po uproszczeniu daje* $k^2C=\dfrac{M_0}{EJ}$, *co pozwala obliczyć* $C=\dfrac{M_0}{P}$.

Warunek brzegowy nr 1 daje: $y(0)=B+C=0$, *a stąd* $B=-C=\dfrac{-M_0}{P}$

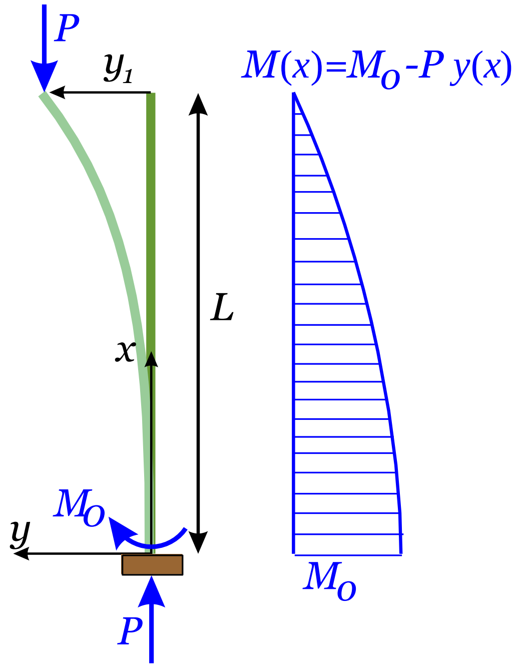
Warunek brzegowy nr 2 daje: $\varphi(0)\approx\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=kA=0$, *a stąd* $A=0$.

Warunek brzegowy nr 3 daje: $y(L)=\dfrac{M_0}{P}(1-\cos kL)=0$, *ponieważ wyrażenie przed nawiasem nie może być równe zeru to zerowanie wyrażenia w nawiasie prowadzi do równania:* $\cos kL=1$.

Najmniejsze nie trywialne rozwiązanie tego równania daje: $kL=2\pi$, więc $P_{kr}=\dfrac{4\pi^2EJ}{L^2}$.

Siłę eulerowską można przedstawić także w tym przypadku w postaci podobnej do uprzednio pokazanej dla pręta swobodnie podpartego: $P_E=\dfrac{\pi^2EJ}{L_w^2}$ gdzie $L_w=\mu L$, $\mu=0{,}5$.

4. Obliczenie siły krytycznej w statycznie wyznaczalnym słupie ściskanym



Warunki brzegowe:

1) $y(0)=0$
2) $\varphi(0)=0$
3) $y(L)=y_1$
4) $M(L)=0$

Z warunku równowagi mamy: $T_0=0$ *oraz* $M_0=Py_1$

Podstawiając $M(x)=M_0 - P\,y(x)$ *otrzymujemy równanie różniczkowe ugięcia słupa:*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=\frac{M_0}{EJ}, \quad \text{gdzie } k^2=\frac{P}{EJ}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja: $y = A\sin kx + B\cos kx + C$, *gdzie stałe A, B, C należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Obliczamy pochodne funkcji y(x):*

$$\frac{dy}{dx}=k(A\cos kx - B\sin kx), \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-k^2(A\sin kx + B\cos kx)$$

Podstawiając te funkcje do równania różniczkowego ugięcia otrzymamy równanie:

$-k^2(A\sin kx + B\cos kx)+k^2(A\sin kx + B\cos kx + C)=\dfrac{M_0}{EJ}$, *które po uproszczeniu daje* $k^2C=\dfrac{M_0}{EJ}$, *co pozwala obliczyć* $C=\dfrac{M_0}{P}$.

Warunek brzegowy nr 1 daje: $y(0)=B+C=0$, *a stąd* $B=-C=\dfrac{-M_0}{P}$

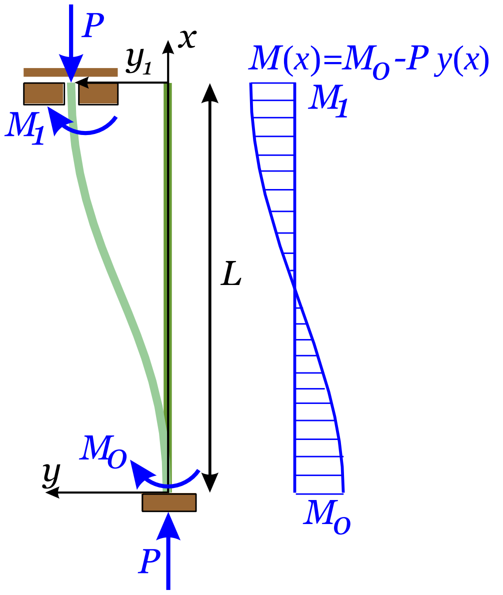
Warunek brzegowy nr 2 daje: $\varphi(0)\approx \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=kA=0$, *a stąd* $A=0$.

Warunek brzegowy nr 4 daje: $M(L)=EJ\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=L}=M_0\cos kL=0$, *ponieważ* M_0 *nie może być równy zeru to warunek sprowadza się do równania:* $\cos kL=0$.

Najmniejsze rozwiązanie tego równania daje: $kL=\pi/2$, więc $P_{kr}=\dfrac{\pi^2EJ}{4L^2}$.

Siłę eulerowską można przedstawić w postaci podobnej do uprzednio pokazanej dla pręta swobodnie podpartego: $P_E=\dfrac{\pi^2EJ}{L_w^{\ 2}}$ *gdzie* $L_w=2L=\mu\,L$, $\mu=2$.

5. Obliczenie siły krytycznej w statycznie niewyznaczalnym słupie ściskanym



Warunki brzegowe:

1) $y(0)=0$
2) $\varphi(0)=0$
3) $y(L)=y_1$
4) $\varphi(L)=0$

Z warunku równowagi mamy: $T_1=0$; $T_0=0$
Ze względu na antysymetrię układu $M_0=M_1$.

Podstawiając $M(x)=M_0-P\,y(x)$ *otrzymujemy równanie różniczkowe ugięcia słupa:* $\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=\frac{M_0}{EJ}$,

gdzie $k^2=\frac{P}{EJ}$.

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja: $y=A\sin kx+B\cos kx+C$, *gdzie stałe A, B, C należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Obliczamy pochodne funkcji y(x):*

$$\frac{dy}{dx}=k(A\cos kx-B\sin kx)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-k^2(A\sin kx+B\cos kx)$$

Podstawiając te funkcje do równania różniczkowego ugięcia otrzymamy równanie:

$-k^2(A\sin kx+B\cos kx)+k^2(A\sin kx+B\cos kx+C)=\frac{M_0}{EJ}$, *które po uproszczeniu daje* $k^2C=\frac{M_0}{EJ}$, *co pozwala obliczyć* $C=\frac{M_0}{P}$.

Warunek brzegowy nr 1 daje: $y(0)=B+C=0$, *a stąd* $B=-C=\frac{-M_0}{P}$

Warunek brzegowy nr 2 daje: $\varphi(0)\approx\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=kA=0$, *a stąd* $A=0$.

Warunek brzegowy nr 3 daje: $y(L)=\frac{M_0}{P}(1-\cos kL)=y_1$.

Warunek brzegowy nr 4 daje: $\varphi(L)\approx\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L}=-kB\sin kL=0$,

ponieważ wyrażenie kL nie może być równe zeru to zerować się musi wartość funkcji: $\sin kL=0$.

Najmniejsze nie trywialne rozwiązanie tego równania daje: $kL=\pi$, więc $P_{kr}=\frac{\pi^2EJ}{L^2}$.

Z warunku brzegowego nr 3 mamy zatem $y_1=2M_0/P$.

Siłę eulerowską można przedstawić także w tym przypadku w postaci podobnej do uprzednio pokazanej dla pręta swobodnie podpartego: $P_E=\frac{\pi^2EJ}{L_w^2}$ gdzie $L_w=L=\mu\,L$, $\mu=1$.