

Fragment rozdziału 8 książki
„Mechanika Budowli z elementami ujęcia komputerowego”,
Arkady 1984,

„Stateczność ustrojów prętowych”,
którego autorami są Andrzej Gomuliński i Marek Witkowski

Tablica 8-9

S_1	20,18	20,18	16,95	13,66	11,23	8,90	6,26	3,30	0,00
S_2	0,00	5,04	8,48	10,24	11,23	11,87	12,52	13,18	13,77

Siły te dla przyjętych danych są zestawione w tabl. 8-9. Wartości te należy pomnożyć przez współczynnik EJ/l_0^3 .

Wykres S_{kr} w układzie S_1, S_2 pokazany jest na rys. 8-34.

8.4. Stateczność ram płaskich w ujęciu metody elementów skończonych

8.4.1. Uwagi wstępne

Omówiona w poprzednim rozdziale analiza stateczności ram płaskich jest oparta na założeniach tzw. teorii drugiego rzędu. Równanie różniczkowe (8-30), stanowiące podstawę określania składowych macierzy sztywności pręta prostego zginanego z udziałem stałej siły osiowej, przedstawia warunek równowagi nieskończenie małego wycinka tego pręta, znajdującego się w konfiguracji aktualnej (odkształconej). Jeśli przyjąć za dopuszczalne dwa założenia: o zachowawczym charakterze siły osiowej oraz o nieodkształcalności podłużnej pręta, wówczas równanie (8-30) można traktować jako dokładny opis matematyczny zagadnienia. Zgodnie ze stosowanym do analizy wybożenia ustrojów prętowych algorytmem metody przemieszczeń, działanie dużych sił osiowych w poszczególnych elementach wpływa na budowę macierzy sztywności ustroju. Parametr zależny od obciążenia powodującego powstawanie takich sił występuje w wyrażeniach na składowe macierzy sztywności w postaci uwikłanej jako argument funkcji trygonometrycznych lub hiperbolicznych. Warunek zerowania się wyznacznika macierzy prowadzi zatem do równania przestępnego o bardzo uwikłanej budowie, którego rozwiązanie w przypadku dużych wymiarów macierzy nastęrcza poważne kłopoty obliczeniowe.

W niniejszym punkcie wyprowadzimy inną, przybliżoną postać macierzy sztywności elementu znajdującego się pod działaniem siły osiowej. Jako podstawę rozważań przyjmujemy algorytm postępowania związany z powszechnie stosowaną obecnie metodą elementów skończonych, która w przypadku ustrojów prętowych i założeniu nieodkształcalności podłużnej elementów pokrywa się z klasyczną metodą przemieszczeń. Otrzymane tą drogą wyrażenia na składowe macierzy sztywności prętów, a w ślad za nimi — na składowe macierzy sztywności ustroju, są znacznie prostsze. Budowa macierzy sztywności ustroju pozwala na zastosowanie standardowej metody poszukiwania wartości własnych macierzy, a zatem znalezienie krytycznych wartości obciążeń jest znacznie łatwiejsze pod względem rachunkowym.

8.4.2. Równanie prac wirtualnych dla pręta zginanego z udziałem siły osiowej

Podstawą dalszych rozważań będzie równanie zasady prac wirtualnych. Równanie takie wyprowadzone zostało w rozdz. 1. Obecnie uogólnimy je na przypadek pręta ściśkanego lub rozciąganego dużą siłą osiową, znajdującego się ponadto pod działaniem obciążenia poprzecznego $p(x)$ (rys. 8-3). Nieskończenie mały wycinek osi odkształconej tego pręta przedstawiony został na rys. 8-5, jego równowagę opisują równania (8-27). Drugie z tych równań przedstawimy obecnie w następującej postaci:

$$T = T_M + T_S, \quad (8-165)$$

gdzie:

$$T_M = \frac{dM}{dx}, \quad T_S = S \frac{dw}{dx}. \quad (8-166)$$

Zgodnie z powyższymi oznaczeniami, pierwsze z równań (8-27) można zapisać następująco:

$$\frac{dT_M}{dx} + \frac{dT_S}{dx} + p = 0. \quad (8-167)$$

Jeśli równanie (8-167) jest prawdziwe dla każdej wartości współrzędnej $0 \leq x \leq l$, to prawdziwe jest również równanie:

$$\int_0^l \left(\frac{dT_M}{dx} + \frac{dT_S}{dx} + p \right) \bar{w} dx = 0, \quad (8-168)$$

gdzie: $\bar{w} = \bar{w}(x)$ – wirtualne przemieszczenie osi pręta w kierunku do niej prostopadłym.

Wykonując po lewej stronie równania (8-168) całkowanie przez części otrzymujemy:

$$|T_M \bar{w}|_0^l - \int_0^l T_M \frac{d\bar{w}}{dx} dx + |T_S \bar{w}|_0^l - \int_0^l T_S \frac{d\bar{w}}{dx} dx + \int_0^l p \bar{w} dx = 0.$$

Uwzględniając pierwszy ze wzorów (8-166), możemy obliczyć drugą całkę z lewej strony powyższego równania przez powtórne całkowanie przez części. Wprowadzając oznaczenia:

$$-\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = \bar{\kappa}, \quad \frac{d\bar{w}}{dx} = \bar{\varphi}, \quad (8-169)$$

możemy równanie (8-168) zapisać teraz w postaci:

$$|(T_M + T_S) \bar{w}|_0^l - |M \bar{\varphi}|_0^l + \int_0^l p \bar{w} dx = \int_0^l M \bar{\kappa} dx + \int_0^l T_S \bar{\varphi} dx. \quad (8-170)$$

Dwa pierwsze wyrażenia z lewej strony równania (8-170) łatwo jest zinterpretować analizując rys. 8-3 oraz biorąc pod uwagę różnicę zwrotów sił wewnętrznych M i T w porównaniu do przedstawionych na rys. 8-5. Możemy napisać kolejno:

$$\begin{aligned} |(T_M + T_S) \bar{w}|_0^l &= |T \bar{w}|_0^l = T(l) \bar{w}(l) - T(0) \bar{w}(0) = W_k \bar{w}_k + W_i \bar{w}_i, \\ -|M \bar{\varphi}|_0^l &= -M(l) \bar{\varphi}(l) + M(0) \bar{\varphi}(0) = \Phi_k \varphi_k + \Phi_i \varphi_i. \end{aligned}$$

Wyrażenia te przedstawiają więc pracę rzeczywistych sił węzłowych na wirtualnych przemieszczeniach przekrojów przywęzłowych pręta. Trzeci wyraz przedstawia pracę rzeczywistego obciążenia p na wirtualnych przemieszczeniach pręta. W przypadku badania stateczności pręta wyraz ten jest oczywiście równy zero. Wykorzystując wprowadzone w p. 8.2.2 oznaczenia:

$$Q = \{W_i \Phi_i \ W_k \Phi_k\}, \quad (8-171)$$

$$\bar{q} = \{\bar{w}_i \ \bar{\varphi}_i \ \bar{w}_k \ \bar{\varphi}_k\}, \quad (8-172)$$

oraz przyjmując $p = 0$, można lewą stronę równania (8-170) zapisać w postaci:

$$|(T_M + T_S) \bar{w}|_0^l - |M \bar{\varphi}|_0^l = \bar{q}^T Q. \quad (8-173)$$

Prawa strona równania (8-170) wyraża pracę rzeczywistych sił przekrojowych na wirtualnych odkształceniach. Z jej budowy wynika, że stan sił przekrojowych określony jest przez dwie składowe M i T_S wektora σ o następującej budowie:

$$\sigma = \{T_S \ M\}, \quad (8-174)$$

natomiast stan wirtualnego odkształcenia — przez składowe $\bar{\varphi}$, $\bar{\varkappa}$ wektora $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{\varepsilon} = \{\bar{\varphi} \ \bar{\varkappa}\}. \quad (8-175)$$

Zgodnie z oznaczeniami (8-174) i (8-175), prawą stronę równania (8-170) można zapisać następująco:

$$\int_0^l M \bar{\varkappa} dx + \int_0^l T_S \bar{\varphi} dx = \int_0^l \bar{\varepsilon}^T \sigma dx, \quad (8-176)$$

a równanie zasady prac wirtualnych przyjmuje znaną z rozdz. 1 postać:

$$\bar{q}^T Q = \int_0^l \bar{\varepsilon}^T \sigma dx, \quad (8-177)$$

jednak przy innej budowie wektorów $\bar{\varepsilon}$ i σ .

8.4.3. Zależności geometryczne i fizyczne dla pręta zginanego z udziałem siły osiowej

W poprzednim punkcie wprowadziliśmy pojęcia wektora stanu odkształcenia ε oraz wektora stanu naprężenia σ , który można również nazwać wektorem sił przekrojowych. Są to jednokolumnowe macierze, których składowe stanowią właściwe dla rozpatrywane-

go modelu ustroju wielkości odkształceń i naprężeń (sił przekrojowych). W przypadku ustroju składającego się z prętów ściskanych i rozciąganych wektory te, określone w każdym pręcie, przyjmują postać:

$$\varepsilon = \{\varphi \kappa\}, \quad \sigma = \{T_s M\}. \quad (8-178)$$

Między składowymi tak określonych wektorów zachodzą zależności, zwane związkami fizycznymi. Z prawa Hooke'a wynika znana z przedmiotu wytrzymałość materiałów zależność między momentem zginającym a krzywizną pręta:

$$M = EJ \kappa, \quad (8-179)$$

natomiast z równań równowagi nieskończenie małego wycinka pręta zginanego z udziałem siły osiowej — wykorzystana uprzednio zależność [por. wzory (8-166) i (8-169)]-

$$T_s = S\varphi. \quad (8-180)$$

Wprowadzając kwadratową macierz:

$$E = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & EJ \end{bmatrix}, \quad (8-181)$$

można związki (8-179) i (8-180) zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} T_s \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & EJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \kappa \end{bmatrix}. \quad (8-182)$$

Wynika stąd macierzowy związek między wektorami stanu naprężenia i stanu odkształcenia:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (8-183)$$

który ma charakter ogólny. Występująca w nim macierz E nosi nazwę macierzy sprężystości.

Wprowadźmy obecnie jeszcze jeden wektor u , określający stan przemieszczenia dowolnego punktu elementu. W przypadku rozważanego zagadnienia zginania pręta prostego ma on tylko jedną niezależną składową:

$$u = \{w\}. \quad (8-184)$$

Składowe wektora stanu odkształcenia ε związane są ze składowymi wektora u zależnościami różniczkowymi. W naszym przypadku związki te określone są wzorami (8-169), przy czym obowiązują one oczywiście również w stanie rzeczywistym (bez kresek nad symbolami). Wzory (8-169) można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \\ -\frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} w, \quad (8-185)$$

lub ogólnie:

$$\varepsilon = \partial u, \quad (8-186)$$

gdzie symbol ∂ oznacza macierz, której składowymi są operatory różniczkowe o budowie właściwej dla rozważanego zagadnienia. Związek (8-186) nosi nazwę zależności

geometrycznych. Podstawiając go do wzoru (8-183), otrzymujemy macierzowy zapis zależności między wektorem stanu naprężenia a wektorem stanu przemieszczenia w postaci:

$$\sigma = E\partial u. \quad (8-187)$$

Na podstawie wzorów (8-186) i (8-187) można wyciągnąć następujący wniosek: wszystkie wielkości geometryczne i statyczne w każdym punkcie każdego elementu ustroju znane są wtedy, jeśli znane są składowe wektora przemieszczenia u oraz zdefiniowane właściwe dla rozważanego zagadnienia związki geometryczne i fizyczne.

Na zakończenie należy podkreślić oczywisty fakt, że wszystkie składowe zdefiniowanych tu wektorów ε , σ i u są funkcjami współrzędnych układu globalnego lub lokalnego, przy czym istnieje oczywiście jednoznaczna transformacja przy zamianie jednego z nich na drugi.

8.4.4. Macierz funkcji kształtu

Stan przemieszczenia dowolnego punktu elementu determinują przemieszczenia punktów węzłowych tego elementu, tworzące w rozważanym przypadku pręta zginanego wektor q określony wzorem (8-172) (przy pominięciu kresek nad symbolami składowych). Między wektorami u i q istnieje zatem liniowa zależność, którą można przedstawić następującym wzorem:

$$u = Nq. \quad (8-188)$$

Wprowadzona w tym miejscu macierz N nosi nazwę macierzy funkcji kształtu. Jej składowe są skalarnymi funkcjami współrzędnych układu lokalnego x lub ξ . Budowę tej macierzy poznamy analizując bardziej szczegółowo wzór (8-188).

Wektor przemieszczeń elementu podzielić można na dwa podwektory:

$$q = \{q_i \ q_k\}, \quad q_\alpha = \{w_\alpha \ \varphi_\alpha\}, \quad \alpha = i, k. \quad (8-189)$$

Wzór (8-188) możemy teraz przepisać w postaci:

$$u = N \begin{bmatrix} q_i \\ q_k \end{bmatrix},$$

co wskazuje, że macierz N ma następującą budowę:

$$N = [N_i \ N_k]. \quad (8-190)$$

Każda z podmacierzy N_α ($\alpha = i, k$) wyraża wpływ składowych podwektora q na składowe wektora u , ma więc tyle kolumn, ile składowych ma podwektor q i tyle wierszy — ile składowych ma wektor u . W rozważanym przypadku, zgodnie ze wzorami (8-184) oraz (8-189), podmacierz N_α można zapisać w postaci:

$$N_\alpha = [N^{ww} \ N^{w\varphi}], \quad \alpha = i, k. \quad (8-191)$$

Składowe podmacierzy N_α są skalarnymi funkcjami zmiennej x lub ξ , które uzależniają przemieszczenie w (pierwszy górny indeks) dowolnego punktu elementu od od-

powiednich przemieszczeń w_α lub φ_α (drugi indeks) jego przekrojów przywęzłowych. Inaczej mówiąc, są to funkcje opisujące ugięcie osi obustronnie utwierdzonego pręta, którego podpora α ($\alpha = i, k$) doznała jednostkowych przemieszczeń liniowych w_α lub kątowych φ_α .

W niektórych przypadkach składowe macierzy funkcji kształtu można wyznaczyć w sposób ścisły. Do takich przypadków należy właśnie rozważane zagadnienie zginania pręta prostego z udziałem sił osiowych. Wystarczy w tym celu obliczone w p. 8.2.2.4 i 8.2.2.5 stałe całkowanie (8-54) oraz (8-63) podstawić do wzoru (8-46), przyjmując jednocześnie $p = 0$. W większości jednak analizowanych ustrojów wyznaczenie ścisłych wzorów na linię ugięcia (lub w przypadku ustrojów powierzchniowych powierzchnię ugięcia) elementu jest niemożliwe. W takich przypadkach zakłada się postaci funkcji kształtu, kierując się szeregiem kryteriów, z których w tym miejscu wymienimy jedynie postulat, aby spełniały one warunki narzucone na przemieszczenia w punktach węzłowych elementu. Tak też postąpimy i w naszym przypadku, decydując się na uzyskanie rozwiązania przybliżonego, o czym była mowa w p. 8.4.1.

Przyjmijmy funkcję kształtu N w postaci wielomianu trzeciego stopnia:

$$N_\alpha = C_1 + C_2 \xi + C_3 \xi^2 + C_4 \xi^3, \quad (8-192)$$

który pozwala na spełnienie właściwej liczby czterech warunków brzegowych. W przypadku poszukiwania funkcji N_α^{ww} będą to warunki określone za pomocą wzorów (8-52), natomiast w przypadku poszukiwania funkcji $N_\alpha^{w\varphi}$ — za pomocą wzorów (8-61). Różniczkując wyrażenie (8-192) otrzymujemy:

$$N'_\alpha = C_2 + 2C_3 \xi + 3C_4 \xi^2. \quad (8-193)$$

Podstawienie warunków brzegowych do wyrażeń (8-192) i (8-193) prowadzi do następującego układu równań na stałe:

$$AC^\gamma = q^\gamma, \quad (8-194)$$

gdzie: $C^\gamma = \{C_1 C_2 C_3 C_4\}^\gamma$ — wektor niewiadomych stałych,

q^γ — wektor przemieszczeń węzłowych określony przez warunki brzegowe (8-52) i (8-61) i mający budowę:

$$\begin{aligned} q^w &= \{1 \ 0 \ 0 \ 0\} \quad \text{dla } \gamma = w, \\ q^\varphi &= \left\{0 \ 0 \ \frac{l}{2} \ 0\right\} \quad \text{dla } \gamma = \varphi, \end{aligned} \quad (8-195)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \xi_\alpha & \xi_\alpha^2 & \xi_\alpha^3 \\ 1 & -\xi_\alpha & \xi_\alpha^2 & -\xi_\alpha^3 \\ 0 & 1 & 2\xi_\alpha & 3\xi_\alpha^2 \\ 0 & 1 & -3\xi_\alpha & 3\xi_\alpha^2 \end{bmatrix} \quad (8-196)$$

macierz współczynników układu równań, w której uwzględniono, że $\xi_\beta = -\xi_\alpha$.

Rozwiązując równanie macierzowe (8-194) otrzymujemy:

$$C^\gamma = A^{-1}q^\gamma, \quad \gamma = w, \varphi, \quad (8-197)$$

gdzie:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\xi_\alpha}{4} & \frac{\xi_\alpha}{4} \\ \frac{3}{4\xi_\alpha} & -\frac{3}{4\xi_\alpha} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4\xi_\alpha} & -\frac{1}{4\xi_\alpha} \\ \frac{1}{4\xi_\alpha^3} & \frac{1}{4\xi_\alpha^3} & \frac{1}{4\xi_\alpha^2} & \frac{1}{4\xi_\alpha^2} \end{bmatrix}. \quad (8-198)$$

Uwzględniając wzory (8-198) i (8-195) wyznaczamy z równania (8-197) następujące wartości stałych:

— w przypadku przesunięcia podpory α o wielkość $w_\alpha = 1$:

$$C^w = \left\{ \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \xi_\alpha \quad 0 \quad -\frac{1}{4} \xi_\alpha^3 \right\}, \quad (8-199)$$

— w przypadku obrotu podpory α o kąt $\varphi_\alpha = 1$:

$$C^\varphi = \frac{l}{2} \left\{ -\frac{1}{4} \xi_\alpha \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \xi_\alpha \quad \frac{1}{4} \xi_\alpha^2 \right\}. \quad (8-200)$$

We wzorach (8-199) i (8-200) uwzględniono fakt, że współrzędna $\xi_\alpha (\alpha = i, k)$ przyjmuje wartości ± 1 , zatem można przenieść ją z mianownika do licznika, bez zmiany wartości odpowiedniego wyrażenia.

Podstawiając obliczone wartości stałych (8-199) do wzoru (8-192), otrzymujemy równanie linii ugięcia pręta od przesunięcia podpory α o wielkość $w_\alpha = 1$, które zapiszemy w następującej postaci:

$$N_\alpha^{ww} = \varrho_\alpha(\xi), \quad \alpha = i, k, \quad (8-201)$$

gdzie:

$$\varrho_\alpha(\xi) = \frac{1}{4} (2 + 3\xi_\alpha \xi - \xi_\alpha \xi^3). \quad (8-202)$$

Wykonując podobne podstawienie stałych (8-200), otrzymamy równanie linii ugięcia pręta od obrotu podpory α o kąt φ_α :

$$N_\alpha^{w\varphi} = \frac{1}{2} \omega_\alpha(\xi), \quad (8-203)$$

gdzie:

$$\omega_\alpha(\xi) = -\frac{1}{4} \xi_\alpha (1 + \xi_\alpha \xi - \xi^2 - \xi_\alpha \xi^3). \quad (8-204)$$

Określiliśmy w ten sposób składowe podmacierzy funkcji kształtu N_α , którą, zgodnie ze wzorem (8-191), przyjmiemy w następującej postaci:

$$N_\alpha = \left[\varrho_\alpha(\xi) \quad \frac{l}{2} \omega_\alpha(\xi) \right], \quad \alpha = i, k. \quad (8-205)$$

Możemy na koniec stwierdzić, że wzory (8-190) i (8-205) określają jednoznacznie pełną macierz funkcji kształtu N dla rozważanego elementu ramy płaskiej. Pozwala to, zgodnie ze wzorem (8-188), na jednoznaczne określenie wektora przemieszczenia u w dowolnym punkcie elementu, jeśli znany jest wektor q przemieszczeń punktów węzłowych elementu.

8.4.5. Macierz odkształceń

Określmy obecnie bezpośrednią zależność wektora odkształcenia w dowolnym punkcie osi elementu od wektora przemieszczeń elementu. Podstawiając do wzoru (8-186) zależność (8-188), otrzymujemy następujący związek:

$$\varepsilon = \partial Nq, \quad (8-206)$$

który, po wprowadzeniu oznaczenia:

$$B = \partial N \quad (8-207)$$

można napisać w postaci:

$$\varepsilon = Bq. \quad (8-208)$$

Wzór (8-208) określa poszukiwaną zależność. Występująca w nim macierz B ma liczbę wierszy równą liczbie składowych wektora oraz tyle kolumn, ile składowych ma wektor q . Zgodnie ze wzorem (8-190) można ją przedstawić w postaci:

$$B = [B_i \quad B_k], \quad (8-209)$$

gdzie:

$$B_\alpha = \partial N_\alpha, \quad \alpha = i, k. \quad (8-210)$$

W przypadku rozważanego elementu, macierz operatorowa ∂ , zgodnie ze wzorem (8-185) oraz zależnościami (8-31) i (8-32), przyjmuje następującą postać:

$$\partial = \left\{ \frac{2}{l} \frac{d}{d\xi} \quad - \frac{4}{l^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \right\}. \quad (8-211)$$

Po wykonaniu operacji (8-211) na podmacierzy N_α określonej wzorem (8-205) otrzymujemy:

$$B_\alpha = \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{l} \varrho'_\alpha(\xi) & \omega'_\alpha(\xi) \\ -\frac{4}{l^2} \varrho''_\alpha(\xi) & -\frac{2}{l} \omega''_\alpha(\xi) \end{array} \right], \quad \alpha = i, k. \quad (8-212)$$

Pełną postać macierzy otrzymamy oczywiście na podstawie wzorów (8-212) i (8-209).

Zauważmy na koniec, że wzór (8-187), po podstawieniu zależności (8-208), przyjmuje następującą postać:

$$\sigma = EBq, \quad (8-213)$$

a więc określa zależność wektora stanu naprężenia (8-178) od wektora przemieszczeń elementu q . Tak więc, przez wprowadzenie macierzy funkcji kształtu N i wykorzystanie obowiązujących dla rozważanego pręta zależności geometrycznych i fizycznych, uzależniliśmy wszystkie występujące w nim wielkości geometryczne i fizyczne od składowych wektora przemieszczeń elementu (8-189).

8.4.6. Wektor sił węzłowych i macierz sztywności elementu

Możemy obecnie wyznaczyć również zależność wektora sił węzłowych Q (8-171) od wektora przemieszczeń elementu q (8-189). Wykorzystamy w tym celu równanie zasady prac wirtualnych (8-177) oraz związki (8-208) i (8-213), które obowiązują dla każdego, a więc również wirtualnego stanu przemieszczenia i odkształcenia. Równanie prac wirtualnych w lokalnym układzie współrzędnych bezwymiarowych przyjmuje postać:

$$\bar{q}^T Q = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \bar{q}^T B^T EBq d\xi. \quad (8-214)$$

Ponieważ składowe wektorów \bar{q} oraz q nie są funkcjami współrzędnej ξ , można wyłączyć je spod znaku całki. Ze względu na fakt, że związek (8-214) jest słuszny dla każdej wartości przemieszczeń wirtualnych — musi zachodzić równość mnożników. Przyjmując oznaczenia:

$$K^* = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 B^T EB d\xi, \quad (8-215)$$

otrzymujemy zależność między wektorem sił węzłowych a wektorem przemieszczeń elementu w postaci:

$$Q = K^* q, \quad (8-216)$$

a więc identycznej ze wzorem (8-19). Określona wzorem (8-216) macierz K^* jest więc macierzą sztywności elementu.

Podstawiając do wzoru (8-215) wyrażenie (8-209) przedstawimy macierz sztywności elementu w następującej postaci:

$$K^* = \begin{bmatrix} K_{ii}^* & K_{ik}^* \\ K_{ki}^* & K_{kk}^* \end{bmatrix}, \quad (8-217)$$

gdzie:

$$K_{\alpha\beta}^* = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 B_{\alpha}^T EB_{\beta} d\xi, \quad \alpha, \beta = i, k. \quad (8-218)$$

Występujące pod znakiem całki macierze β_{α} , B_{β} i E określone są za pomocą wzorów (8-212) (w przypadku macierzy B_{β} wskaźnik α należy zastąpić wskaźnikiem β) oraz (8-181). Podstawiając te związki do wzoru (8-218) i wykonując mnożenie macierzy, otrzymujemy:

$$K_{\alpha\beta}^* = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{4S}{l^2} \varrho'_\alpha \varrho'_\beta + \frac{16EJ}{l^4} \varrho''_\alpha \varrho''_\beta & \frac{2S}{l} \varrho'_\alpha \omega'_\beta + \frac{8EJ}{l^3} \varrho''_\alpha \omega''_\beta \\ \frac{2S}{l} \omega'_\alpha \varrho'_\beta + \frac{8EJ}{l^3} \varrho''_\beta \omega''_\alpha & S \omega'_\alpha \omega'_\beta + \frac{4EJ}{l^2} \omega''_\alpha \omega''_\beta \end{bmatrix} d\xi. \quad (8-219)$$

Do wzoru (8-219) należy podstawić teraz wyrażenia na pochodne funkcji kształtu, określonych wzorami (8-202) i (8-204):

$$\begin{aligned} \varrho'_\gamma &= \frac{3}{4} \xi_\gamma (1 - \xi^2), & \varrho''_\gamma &= -\frac{3}{2} \xi_\gamma \xi, \\ \omega'_\gamma &= \frac{1}{4} (-1 + 2\xi_\gamma \xi + 3\xi^2), & \omega''_\gamma &= \frac{1}{2} (\xi_\gamma + 3\xi), \end{aligned} \quad (8-220)$$

$\gamma = \alpha, \beta.$

Po wykonaniu elementarnego całkowania otrzymujemy ostatecznie podmacierz $K_{\alpha\beta}^*$ w następującej postaci:

$$K_{\alpha\beta}^* = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \frac{S}{l} \xi_\alpha \xi_\beta + \frac{12EJ}{l^3} \xi_\alpha \xi_\beta & -\frac{1}{10} S \xi_\alpha - \frac{6EJ}{l^2} \xi_\alpha \\ -\frac{1}{10} S \xi_\beta - \frac{6EJ}{l^2} \xi_\beta & Sl \left(\frac{1}{12} \xi_\alpha \xi_\beta + \frac{1}{20} \right) + \frac{EJ}{l} (3 + \xi_\alpha \xi_\beta) \end{bmatrix}. \quad (8-221)$$

Określoną powyższym wzorem macierz $K_{\alpha\beta}^*$ można przedstawić jako sumę dwóch macierzy:

$$K_{\alpha\beta}^* = K_{\alpha\beta} \pm K_{\alpha\beta}^g, \quad (8-222)$$

gdzie:

$$K_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} \xi_\alpha \xi_\beta & -\frac{6EJ}{l^2} \xi_\alpha \\ \frac{6EJ}{l^2} \xi_\beta & \frac{EJ}{l} (3 + \xi_\alpha \xi_\beta) \end{bmatrix}, \quad (8-223)$$

$$K_{\alpha\beta}^g = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \frac{S}{l} \xi_\alpha \xi_\beta & -\frac{1}{10} S \xi_\alpha \\ -\frac{1}{10} S \xi_\beta & Sl \left(\frac{1}{12} \xi_\alpha \xi_\beta + \frac{1}{20} \right) \end{bmatrix}. \quad (8-224)$$

Ponieważ wszystkie rozważania przeprowadzone zostały dla dodatniej (rozciągającej pręt) siły S — znak minus we wzorze (8-222) obowiązuje dla ujemnej, czyli ściskającej pręt siły S .

Dokonując permutacji wskaźników we wzorach (8-223) i (8-224) oraz podstawiając $\xi_i = -1$, $\xi_k = 1$, otrzymujemy macierze K i K^g o następującej budowie:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}, \quad (8-225)$$

$$K^g = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \frac{S}{l} & \frac{1}{10} S & -\frac{6}{5} \frac{S}{l} & \frac{1}{10} S \\ \frac{1}{10} S & \frac{2}{15} Sl & -\frac{1}{10} S & -\frac{1}{30} Sl \\ -\frac{5}{6} \frac{S}{l} & -\frac{1}{10} S & \frac{6}{5} \frac{S}{l} & -\frac{1}{10} S \\ \frac{1}{10} S & -\frac{1}{30} Sl & -\frac{1}{10} S & \frac{2}{15} Sl \end{bmatrix}. \quad (8-226)$$

Określona wzorem (8-225) macierz K jest wyprowadzoną w rozdz. 3 macierzą sztywności pręta zginanego. Macierz K^g wg (8-226) wyraża wpływ siły osiowej na sztywność pręta zginanego i nazywana jest geometryczną macierzą sztywności lub macierzą wstępnych naprężeń. Pełna macierz sztywności rozpatrywanego pręta wyraża się wzorem:

$$K^* = K + K^g \quad (8-227)$$

i stanowi przybliżoną postać macierzy (8-71), w której siła osiowa występuje jako argument funkcji hiperbolicznych lub trygonometrycznych.

Dla wygody analizy całego ustroju metodą przemieszczeń dokonamy obecnie zmiany wektora przemieszczeń elementu q oraz, w ślad za nim, wektora sił węzłowych Q . W punkcie 8.3.3 wyjaśniliśmy, że w przypadku założenia o nieodkształcalności podłużnej pręta istotnymi wielkościami geometrycznymi są nie bezwzględne wartości przemieszczeń w_i i w_k , lecz ich różnica. Przyjmiemy więc wektor przemieszczeń elementu w postaci (rys. 8-15):

$$q = \{\varphi_i \ \varphi_k \ \psi\}, \quad \psi = \frac{w_k - w_i}{l}, \quad (8-228)$$

$$Q = \{\Phi_i \ \Phi_k \ \Phi\}, \quad \Phi = l W. \quad (8-229)$$

Odpowiadające wektorom (8-228) i (8-229) macierze sztywności K oraz K^g przyjmują następującą postać:

$$K = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \\ -6 & -6 & 12 \end{bmatrix}, \quad (8-230)$$

$$K^g = SI \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}. \quad (8-231)$$

Wprowadzając do wzoru (8-231) stosowany w p. 8.2 i 8.3 parametr:

$$\lambda^2 = \frac{|S| l^2}{EJ},$$

zapiszemy geometryczną macierz sztywności elementu następująco:

$$K^g = \frac{EJ}{l} \lambda^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}. \quad (8-232)$$

Podajmy na koniec, wykorzystując wzór (8-227), w jawnej postaci macierze sztywności pręta obustronnie utwierdzonego, zginanego z udziałem siły osiowej S . W przypadku działania siły rozciągającej mamy:

$$K^* = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 + \frac{2}{15} \lambda^2 & 2 - \frac{1}{30} \lambda^2 & -\left(6 + \frac{1}{10} \lambda^2\right) \\ 2 - \frac{1}{30} \lambda^2 & 4 + \frac{2}{15} \lambda^2 & -\left(6 + \frac{1}{10} \lambda^2\right) \\ -\left(6 + \frac{1}{10} \lambda^2\right) & -\left(6 + \frac{1}{10} \lambda^2\right) & 12 + \frac{6}{5} \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad (8-233)$$

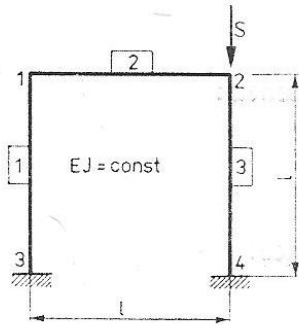
natomiast w przypadku pręta ściskanego macierz sztywności przyjmuje postać:

$$K^* = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 - \frac{2}{15} \lambda^2 & 2 + \frac{1}{30} \lambda^2 & -\left(6 - \frac{1}{10} \lambda^2\right) \\ 2 + \frac{1}{30} \lambda^2 & 4 - \frac{2}{15} \lambda^2 & -\left(6 - \frac{1}{10} \lambda^2\right) \\ -\left(6 - \frac{1}{10} \lambda^2\right) & -\left(6 - \frac{1}{10} \lambda^2\right) & 12 - \frac{6}{5} \lambda^2 \end{bmatrix}. \quad (8-234)$$

Wzory (8-233) i (8-234) stanowią przybliżenie wzoru (8-130), w którym podano macierz sztywności pręta uzyskaną po przyjęciu ścisłych funkcji ugięcia pręta zginanego i jednocześnie rozciąganego lub ściskanego.

8.4.7. Wyznaczenie siły krytycznej w ramie

Przykład 8-7. Obliczmy przybliżoną wartość siły krytycznej dla ramy pokazanej na rys. 8-35.



Rys. 8-35

Rozwiązanie. Określmy najpierw wektor przemieszczeń ramy i poszczególnych prętów. Jeśli wektorowi przemieszczeń ramy nadamy postać:

$$\mathbf{q} = \{\varphi_1 \ \varphi_2 \ \delta_5\},$$

to ze względu na oczywisty związek:

$$\varphi_5^1 = \varphi_5^2 = \delta_5$$

wektory przemieszczeń prętów w układzie globalnym i lokalnym będą równe i można je zapisać następująco:

$$\mathbf{q}^1 = \{\varphi_1 \ \delta_5\}, \quad \mathbf{q}^2 = \{\varphi_1 \ \varphi_2\}, \quad \mathbf{q}^3 = \{\varphi_2 \ \delta_5\}.$$

Macierze sztywności dla prętów 1 i 2 oblicza się zgodnie z zasadami wyłożonymi w rozdz. 3:

$$\mathbf{K}^1 = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^2 = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

natomiast macierz \mathbf{K}^3 utworzymy, korzystając ze wzoru (8-234). Wprowadzając dla wygody obliczeń oznaczenie:

$$\mu = \frac{Sl^2}{30EJ}, \quad (8-235)$$

otrzymamy

$$\mathbf{K}^3 = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4(1-\mu) & -3(2-\mu) \\ -3(2-\mu) & 12(1-3\mu) \end{bmatrix}.$$

Macierz sztywności ramy po złożeniu jej z macierzą sztywności prętów zapiszemy następująco:

$$\mathbf{K} = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 8 & 2 & -6 \\ 2 & 4(2-\mu) & -3(2-\mu) \\ -6 & -3(2-\mu) & 12(2-3\mu) \end{bmatrix},$$

a warunek wyboczenia przybierze znaną postać:

$$|\mathbf{K}| = 0.$$

Wartość wyznacznika nie zmieni się, jeśli wiersz środkowy pomnożymy przez cztery, odejmiemy od górnego i pomnożymy przez trzy, dodamy do dolnego. Otrzymamy teraz:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2-16(2-\mu) & -6+12(2-\mu) \\ 2 & 4(2-\mu) & -3(2-\mu) \\ 0 & -3(2-\mu)+12(2-\mu) & 12(2-3\mu)-9(2-\mu) \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -30+16\mu & 18-12\mu \\ 18-9\mu & 6+27\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Jeśli z pierwszego wiersza wyłączymy liczbę dwa, a z drugiego trzy, to wyznacznik przybierze postać:

$$-2 \cdot 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} -(15-8\mu) & 9-6\mu \\ 3(2-\mu) & 2-9\mu \end{vmatrix} = 0,$$

a po rozwinięciu da się zapisać w formie równania:

$$-(15+8\mu)(2-9\mu)-3(2-\mu)(9-6\mu) = 0.$$

Ostatecznie, po uporządkowaniu dostajemy równanie kwadratowe:

$$\mu^2 - 2,378\mu + 0,933 = 0,$$

którego mniejszy pierwiastek wynosi:

$$\mu = \frac{2,378 - \sqrt{2,378^2 - 4 \cdot 0,933}}{2} = 0,496.$$

Wykorzystując zależność (8-235), otrzymamy przybliżoną wartość siły krytycznej w ramie:

$$S_{kr} = 30 \cdot 0,496 \frac{EJ}{l^2} = 14,9 \frac{EJ}{l^2}.$$

Jeśli do wyznaczenia tej siły zastosowalibyśmy wzory ściśle (por. p. 8.3), wartość jej wyniosłaby

$$S_{kr} = 15,8 \frac{EJ}{l^2}.$$

8.4.8. Uwagi końcowe

Rozwiązany powyżej przykład 8-7 stanowi ilustrację zastosowania geometrycznej macierzy sztywności do wyznaczania obciążeń krytycznych dla ram płaskich. Ogólnie można stwierdzić, że parametr λ_{kr} , zawierający wartość obciążenia krytycznego S_{kr} , wyznacza się drogą poszukiwania nietrywialnych (niezerowych) rozwiązań jednorodnego macierzowego równania metody przemieszczeń:

$$K^*(\lambda) q = 0. \quad (8-236)$$

Macierz sztywności ramy $K^*(\lambda)$, po złożeniu jej z macierzy sztywności elementów [por. wzory (8-230) i (8-232)], można przedstawić w postaci

$$K^*(\lambda) = K - \lambda^2 K^g, \quad (8-237)$$

a zatem równanie (8-236) przybiera formę:

$$Kq = \lambda^2 K^g q. \quad (8-238)$$

W przypadku ramy o dużej liczbie niewiadomych obrotów i przesuwów, analityczne rozwijanie wyznacznika macierzy $K^*(\lambda)$ i wyznaczanie pierwiastków tzw. równania wiekowego (sekularnego) jest bardzo pracochłonne, a więc — nieefektywne. Obliczenia należy przeprowadzać numerycznie, korzystając, w miarę możliwości, z gotowych standardowych programów na EMC. Można tego dokonać przekształcając równanie (8-238) do postaci:

$$Ax = \lambda^2 x \quad (8-239)$$

i poszukując wartości własnych λ^2 macierzy A z równania:

$$|A - \lambda^2 I| = 0. \quad (8-240)$$

W tym celu należy macierz K^g przedstawić w postaci iloczynu macierzy trójkątnych:

$$K^g = G^T G, \quad (8-241)$$