

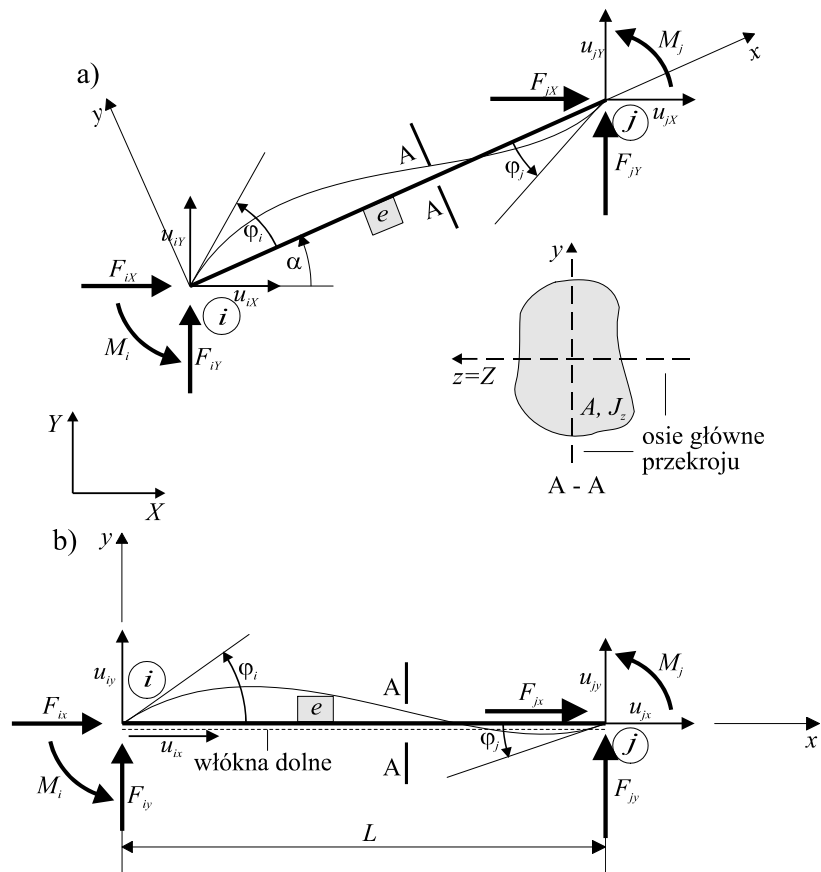
ROZDZIAŁ IV. STATYKA PŁASKICH UKŁADÓW RAMOWYCH

Wybranie właściwego modelu obliczeniowego konstrukcji jest niezwykle ważne dla jakości i dokładności otrzymanych rezultatów. Decyzja czy dana konstrukcja jest ramą czy kratą (np. kratownicą o sztywnych węzłach) jest często subiektywna i zależy od doświadczenia i intuicji wykonującego obliczenia.

W rozdziale tym przedstawimy kolejny model konstrukcji prętowej - ramę płaską, który rozszerzy możliwości modelowania rzeczywistych układów prętowych. Element ramy płaskiej jest elementem ogólniejszym od przedstawionego w rozdz. II elementu kratowego, gdyż przy jego pomocy można również modelować idealne konstrukcje kratowe (przegubowe połączenia elementów w węzłach). Najprościej można by rzec, że rama jest konstrukcją, której pręty mogą być zginane a w kratownicy tylko ściskane lub rozciągane. Ma to następujące konsekwencje:

- pręt (element) ramy może być obciążony między węzłami,
- możliwe jest modelowanie różnego typu obciążeń: sił skupionych, momentów skupionych, obciążeń ciągłych,
- połączenie elementu z węzłem może być połączeniem sztywnym, gdy kąt obrotu węzła i przekroju przywęzłowego elementu są jednakowe, lub przegubowym, gdy możliwe są niezależne obroty węzła i przekroju przywęzłowego,
- węzeł ramy płaskiej ma trzy stopnie swobody tzn. dla wyznaczenia jego położenia musimy znać dwie składowe wektora przesunięcia u_x , u_y oraz kąty obrotu φ_z .

W przypadku ram płaskich będziemy pomijali indeks Z przy kątach obrotu, gdyż wszystkie kąty obrotu na płaszczyźnie XY , której będziemy używali do opisu konstrukcji, są kątami obrotu względem osi Z . Założmy też, że element ramy jest prosty i jednorodny, tzn. wykonany z jednakowego materiału oraz o stałym przekroju poprzecznym. Rys.4.1 przedstawia widok elementu ramowego oraz kierunki i zwroty przemieszczeń i sił węzłowych, które uważać będziemy za dodatnie.



Rys.4.1

4.1. MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU RAMY PŁASKIEJ

Przemieszczenia i siły węzłowe pokazane na Rys.4.1a, b pogrupujemy tak jak uprzednio (rozdz. II, III) w macierze jednokolumnowe, które nazywać będziemy wektorami. Wektor przemieszczeń węzła początkowego i i końcowego j w układzie lokalnym (Rys.4.1b):

$$\mathbf{u}'_i = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ \varphi_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_j = \begin{bmatrix} u_{jx} \\ u_{jy} \\ \varphi_j \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Wektory sił węzłowych w lokalnym układzie współrzędnych

$$\mathbf{f}'_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}'_j = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_j \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Wektor przemieszczeń elementu w układzie lokalnym:

$$\mathbf{u}'^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_i \\ \mathbf{u}'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ \varphi_i \\ u_{jx} \\ u_{jy} \\ \varphi_j \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Wektor sił węzłowych elementu w układzie lokalnym:

$$\mathbf{f}'^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_i \\ \mathbf{f}'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_i \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_j \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Wszystkie utworzone tu wektory opisać można również w układzie globalnym:

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{iX} \\ u_{iY} \\ \varphi_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} u_{jX} \\ u_{jY} \\ \varphi_j \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ M_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_j = \begin{bmatrix} F_{jX} \\ F_{jY} \\ M_j \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{iX} \\ u_{iY} \\ \varphi_i \\ u_{jX} \\ u_{jY} \\ \varphi_j \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ M_i \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ M_j \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Tak jak w poprzednich rozdziałach kluczowe znaczenie będzie miał związek między siłami węzłowymi elementu a przemieszczeniami węzłów. Związek ten (analogiczny jak równanie 2.5 dla kratownicy) w lokalnym układzie współrzędnych ma postać:

$$\mathbf{K}^{e'} \mathbf{u}^{e'} = \mathbf{f}^{e'}, \quad (4.9)$$

a w układzie globalnym:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e. \quad (4.10)$$

Skupimy się teraz na poszukiwaniu macierzy sztywności $\mathbf{K}^{e'}$ w lokalnym układzie współrzędnych a następnie jej transformacji do układu globalnego.

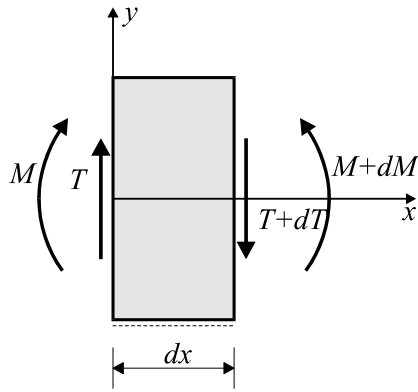
Równania równowagi elementu przedstawionego na Rys.4.1b prowadzą do następujących związków między siłami węzłowymi:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{ix} + F_{jx} = 0 \rightarrow F_{ix} = -F_{jx}; \\ \sum F_y &= F_{iy} + F_{jy} = 0; \\ \sum M_i &= M_i + M_j + F_{jy} L = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Jak widać brakuje jeszcze trzech równań, aby wyliczyć sześć składowych wektora $\mathbf{f}^{e'}$. Równań tych dostarczą nam rozważania dotyczące odkształceń elementu. Deformacja spowodowana siłami osiowymi F_{ix} oraz F_{jx} jest identyczna, jak dla elementu kratownicy, skorzystamy więc z wyznaczonych wcześniej zależności 2.11, 2.12a. Pozostałe równania otrzymamy rozważając deformację giętą elementu oraz związek między siłami poprzecznymi i momentami zginającymi. Jak wiadomo między krzywizną a momentem zginającym zachodzi związek (por. [8]):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EJ_z}, \quad (4.12)$$

gdzie ρ oznacza promień krzywizny, E - moduł Younga materiału, J_z - moment bezwładności przekroju poprzecznego elementu (por. Rys.4.1).



Rys.4.2

Równowaga fragmentu pręta zginanego (Rys.4.2) dostarcza równania:

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx}. \quad (4.13)$$

Odmienne niż to się zwykle przyjmować znak prawej strony równania (4.12) (por. [8]) wynika ze zwrotu osi y lokalnego układu współrzędnych, który w naszych założeniach skierowany jest „do góry”.

Ponieważ zajmować się będziemy tylko liniowymi konstrukcjami o małych ugięciach, przyjmiemy $\frac{dy}{dx} \ll 1$, co pozwoli uprościć równanie (4.12) do znanej postaci:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_z}. \quad (4.14)$$

Różniczkując dwukrotnie to równanie otrzymamy związek (por. [8], [10]):

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q_y(x)}{EJ_z}, \quad (4.15)$$

gdzie $q_y(x)$ oznacza ciągłe obciążenie prostopadłe do osi elementu. Rozważany tu element wolny jest od obciążeń międzywęzłowych, więc $q_y \equiv 0$.

Ostatecznie otrzymujemy poszukiwany układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{d^4 y}{dx^4} = 0, \\ \text{b) } & \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_z}, \\ \text{c) } & \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{T(x)}{EJ_z}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Po scałkowaniu zależności (4.16a) otrzymamy równania

- linii ugięcia elementu ramowego:

$$y(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4, \quad (4.17)$$

- momentu zginającego:

$$M(x) = EJ_z [C_1 x + C_2], \quad (4.18)$$

- siły poprzecznej:

$$T(x) = EJ_z C_1, \quad (4.19)$$

gdzie $C_1 \dots C_4$ oznaczają stałe całkowania, które należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

Mamy cztery warunki brzegowe

- w węźle i , $x=0$:

$$y(0) = u_{iy},$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \varphi_i, \quad (4.20)$$

- w węźle j , $x=L$:

$$y(L) = u_{jy},$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = \varphi_j. \quad (4.21)$$

Po podstawieniu tych warunków otrzymamy z równania (4.17) następujące wartości stałych całkowania:

$$C_1 = \frac{6}{L^2} \left(\varphi_i + \varphi_j - 2 \frac{u_{jy} - u_{iy}}{L} \right),$$

$$C_2 = -\frac{1}{L} \left(4\varphi_i + 2\varphi_j - 6 \frac{u_{jy} - u_{iy}}{L} \right), \quad (4.22)$$

$$C_3 = \varphi_i,$$

$$C_4 = u_{iy}.$$

Stąd, po wstawieniu do równań (4.18), (4.19) i uwzględnieniu zwrotów momentów węzłowych oraz momentów zginających (por. Rys.4.1 i Rys.4.2) otrzymamy:

$$M_i = -M(0) = \frac{EJ_z}{L} \left[4\varphi_i + 2\varphi_j - 6 \frac{u_{jy} - u_{iy}}{L} \right],$$

$$M_j = M(L) = \frac{EJ_z}{L} \left[2\varphi_i + 4\varphi_j - 6 \frac{u_{jy} - u_{iy}}{L} \right], \quad (4.23)$$

$$F_{iy} = T(0) = \frac{EJ_z}{L^2} \left[6\varphi_i + 6\varphi_j - 12 \frac{u_{jy} - u_{iy}}{L} \right],$$

$$F_{jy} = -T(L) = \frac{EJ_z}{L^2} \left[-6\varphi_i - 6\varphi_j + 12 \frac{u_{jy} - u_{iy}}{L} \right].$$

Zestawiając w odpowiedniej kolejności równania (2.12a) i (4.23) otrzymujemy ostatecznie poszukiwaną macierz sztywności:

$$\mathbf{K}^{ie} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & & & -\frac{EA}{L} & & \\ & 12 \frac{EJ_z}{L^3} & 6 \frac{EJ_z}{L^2} & & -12 \frac{EJ_z}{L^3} & 6 \frac{EJ_z}{L^2} \\ & 6 \frac{EJ_z}{L^2} & 4 \frac{EJ_z}{L} & & -6 \frac{EJ_z}{L^2} & 2 \frac{EJ_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & & & \frac{EA}{L} & & \\ & -12 \frac{EJ_z}{L^3} & -6 \frac{EJ_z}{L^2} & & 12 \frac{EJ_z}{L^3} & -6 \frac{EJ_z}{L^2} \\ & 6 \frac{EJ_z}{L^2} & 2 \frac{EJ_z}{L} & & -6 \frac{EJ_z}{L^2} & 4 \frac{EJ_z}{L} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

Związki opisane równaniami (4.23) znane są w mechanice budowli (w nieco innej postaci) pod nazwą wzorów transformacyjnych metody przemieszczeń (por. [10]).

4.2. TRANSFORMACJA MACIERZY SZTYWNOŚCI Z UKŁADU LOKALNEGO DO GLOBALNEGO

Przeniesienie macierzy \mathbf{K}^{ie} do globalnego układu współrzędnych odbywa się wg analogicznych reguł jak te, które zostały opisane w p.2.4 równaniem (2.34). Do utworzenia macierzy obrotu elementu potrzebna nam będzie \mathbf{R}_i - macierz obrotu z układu lokalnego do globalnego węzła i . Ponieważ trzeci stopień swobody węzłów ramy jest obrotem wokół osi z , która nie zmienia swojego położenia, gdyż jest cały czas prostopadła do płaszczyzny xy , to obrót będzie identyczny z obrotem elementu kratowego:

$$u_{iX} = u_{ix} \cos \alpha - u_{iy} \sin \alpha,$$

$$u_{iY} = u_{ix} \sin \alpha + u_{iy} \cos \alpha,$$

$$\varphi_{iZ} = \varphi_{iz} = \varphi_i,$$

lub w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} u_{iX} \\ u_{iY} \\ \varphi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ \varphi_i \end{bmatrix}, \mathbf{u}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{u}'_i,$$

$$\text{gdzie } \mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Zgodnie z założeniami poczynionymi na wstępie element ramy jest prosty, tak więc macierz transformacji węzła j jest identyczna z \mathbf{R}_i co doprowadza do ostatecznej postaci macierzy transformacji elementu:

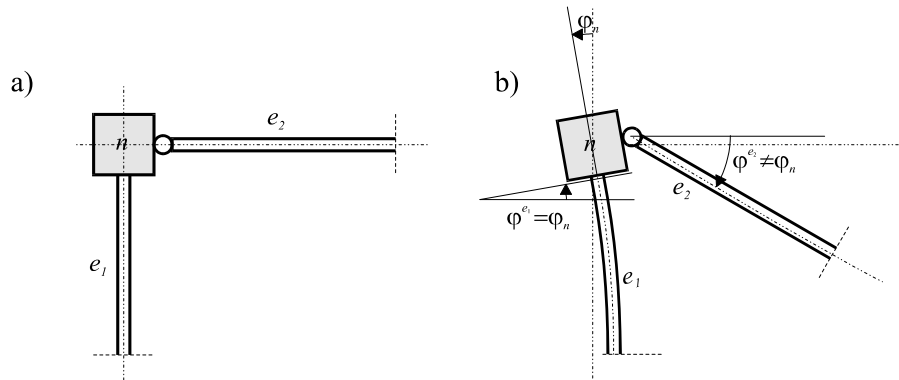
$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Po wykonaniu mnożeń macierzy opisanych równaniem (2.34) otrzymamy macierz sztywności elementu ramowego w globalnym układzie współrzędnych. Postać jej jest niestety dość złożona:

$$\mathbf{K}^e = \frac{EJ_z}{L^2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & u_{ix} & u_{iy} & \varphi_{ix} & u_{jx} & u_{jy} & \varphi_{jx} \\ \hline \frac{1}{L} \left(\frac{c^2}{\lambda^2} + 12s^2 \right) & \frac{sc}{L} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 12 \right) & -6s & -\frac{1}{L} \left(\frac{c^2}{\lambda^2} + 12s^2 \right) & -\frac{sc}{L} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 12 \right) & -6s & F_{ix} \\ \hline \frac{sc}{L} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 12 \right) & \frac{1}{L} \left(\frac{s^2}{\lambda^2} + 12c^2 \right) & 6c & -\frac{sc}{L} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 12 \right) & -\frac{1}{L} \left(\frac{s^2}{\lambda^2} + 12c^2 \right) & 6c & F_{iy} \\ \hline -6s & 6c & 4L & -6s & -6c & 2L & M_i \\ \hline -\frac{1}{L} \left(\frac{c^2}{\lambda^2} + 12s^2 \right) & -\frac{sc}{L} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 12 \right) & -6s & \frac{1}{L} \left(\frac{c^2}{\lambda^2} + 12s^2 \right) & \frac{sc}{L} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 12 \right) & 6s & F_{jx} \\ \hline -\frac{sc}{L} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 12 \right) & -\frac{1}{L} \left(\frac{s^2}{\lambda^2} + 12c^2 \right) & -6c & \frac{sc}{L} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 12 \right) & \frac{1}{L} \left(\frac{s^2}{\lambda^2} + 12c^2 \right) & -6c & F_{jy} \\ \hline -6s & 6c & 2L & 6s & -6c & 4L & M_j \end{array} \\ \lambda^2 = \frac{J_z}{AL^2} \quad c = \cos \alpha \quad s = \sin \alpha \end{array} \quad (4.27)$$

4.3. KONDENSACJA STATYCZNA MACIERZY SZTYWNOŚCI

Element ramowy nie zawsze połączony jest z węzłem w sposób zapewniający zgodność wszystkich przemieszczeń węzła i przekroju przywęzłowego pręta. Najczęściej takimi niepełnymi połączeniami jest połączenie przegubowe pokazane na Rys.4.3.

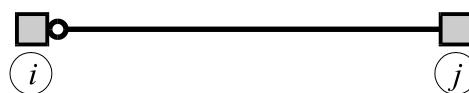


Rys.4.3

W połączeniu tym kąt obrotu węzła nie wpływa na obrót przywęzłowego przekroju elementu, który może obracać się niezależnie od węzła (element e_2 na Rys.4.3).

Nieznany kąt obrotu takiego elementu wyznaczamy z dodatkowego równania, którego dostarcza warunek równowagi momentów w przegubie. Można zatem zredukować ilość stopni swobody elementu, gdyż dodatkowy warunek równowagi pozwoli wyeliminować z układu równań jedno przemieszczenie. Pokażemy sposób eliminacji stopnia swobody na przykładzie dwóch rodzajów połączeń elementu z węzłem.

Przykład nr 1 - połączenie przegubowe (Rys.4.4).



Rys.4.4

Dodatkowy warunek równowagi przekroju przywęzłowego i :

$$M_i = 0, \tag{4.28}$$

proceedzi po uwzględnieniu równań (4.2), (4.9) oraz (4.24) do warunku:

$$\frac{EJ_z}{L} \left[6 \frac{u_{iy}}{L} + 4\varphi_i - 6 \frac{u_{jy}}{L} + 2\varphi_j \right] = 0, \tag{4.29}$$

a stąd wyliczamy poszukiwaną wartość kąta obrotu przekroju przy węźle i :

$$\varphi_i = -\frac{3}{2} \frac{u_{iy}}{L} + \frac{3}{2} \frac{u_{jy}}{L} - \frac{1}{2} \varphi_j. \tag{4.30}$$

Po wstawieniu tego wyniku do równania (4.9) przy uwzględnieniu macierzy (4.24) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 F_{iy} &= \frac{EJ_z}{L^2} \left[12 \frac{u_{iy}}{L} + 6 \left(-\frac{3}{2} \frac{u_{iy}}{L} + \frac{3}{2} \frac{u_{jy}}{L} - \frac{1}{2} \varphi_j \right) - 12 \frac{u_{jy}}{L} + 6\varphi_j \right] = \\
 &= \frac{EJ_z}{L^2} \left[3 \frac{u_{iy}}{L} - 3 \frac{u_{jy}}{L} + 3\varphi_j \right], \\
 F_{jy} &= \frac{EJ_z}{L^2} \left[-12 \frac{u_{iy}}{L} - 6 \left(-\frac{3}{2} \frac{u_{iy}}{L} + \frac{3}{2} \frac{u_{jy}}{L} - \frac{1}{2} \varphi_j \right) + 12 \frac{u_{jy}}{L} - 6\varphi_j \right] = \\
 &= \frac{EJ_z}{L^2} \left[-3 \frac{u_{iy}}{L} + 3 \frac{u_{jy}}{L} - 3\varphi_j \right], \\
 M_j &= \frac{EJ_z}{L} \left[6 \frac{u_{iy}}{L} + 2 \left(-\frac{3}{2} \frac{u_{iy}}{L} + \frac{3}{2} \frac{u_{jy}}{L} - \frac{1}{2} \varphi_j \right) - 6 \frac{u_{jy}}{L} + 4\varphi_j \right] = \\
 &= \frac{EJ_z}{L} \left[3 \frac{u_{iy}}{L} - 3 \frac{u_{jy}}{L} + 3\varphi_j \right],
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

a stąd nową macierz sztywności elementu z przegubem w węźle i :

$$\mathbf{K}^{ie(3,i)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ_z}{L^3} & & 0 & -3\frac{EJ_z}{L^3} & 3\frac{EJ_z}{L^2} \\ & & & & & \\ -\frac{EA}{L} & 0 & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ_z}{L^3} & & 0 & 3\frac{EJ_z}{L^3} & -3\frac{EJ_z}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ_z}{L^2} & & 0 & -3\frac{EJ_z}{L^2} & 3\frac{EJ_z}{L} \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

Indeksy górne $(3,i)$ w oznaczeniu macierzy sztywności (4.32) informują, że wyeliminowany został trzeci stopień swobody w węźle początkowym.

Przykład nr 2 - połączenie przesuwne (Rys.4.5)

\mathbf{K}_{00} jest macierzą o wymiarach 1x1, a więc skalar, skalarami są również bloki \mathbf{f}_0 i \mathbf{u}_0 .

Mnożenie bloków macierzy (4.36) daje:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{f}_1 &= \mathbf{K}_{11} \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{10} \mathbf{u}_0, \\ \text{b) } \mathbf{f}_0 &= 0 = \mathbf{K}_{01} \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{00} \mathbf{u}_0 - \text{skalar.} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Z równania (4.37b) wyliczymy

$$\mathbf{u}_0 = -\mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{01} \mathbf{u}_1, \quad (4.38)$$

a po wstawieniu tego związku do (4.37a) otrzymujemy:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{K}_{11} \mathbf{u}_1 - \mathbf{K}_{10} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{01} \mathbf{u}_1, \quad (4.39)$$

lub krócej

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{K}'' \mathbf{u}_1, \quad (4.40)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}'' = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{10} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{01}^T, \quad (4.41)$$

jest skondensowaną macierzą sztywności elementu.

Pozostaje jeszcze wyznaczyć wektor \mathbf{f}_1 obciążenia elementu. Otrzymamy go przez złożenie wektora obciążenia elementu ze sztywnymi połączeniami z węzłami \mathbf{f}^o i obciążenia wywołanego przemieszczeniem węzła zwolnionego z więzów \mathbf{f}''

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^o - \mathbf{f}'' = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^o \\ \mathbf{f}_0^o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1'' \\ \mathbf{f}_0'' \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Ponieważ

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_0^o - \mathbf{f}_0'' = 0, \quad (4.43)$$

to

$$\mathbf{f}_0'' = \mathbf{f}_0^o = \mathbf{K}_{01}^o \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{00}^o \mathbf{u}_0, \quad (4.44)$$

a stąd

$$\mathbf{u}_0 = (\mathbf{K}_{00}^o)^{-1} \mathbf{f}_0^o, \quad (4.45)$$

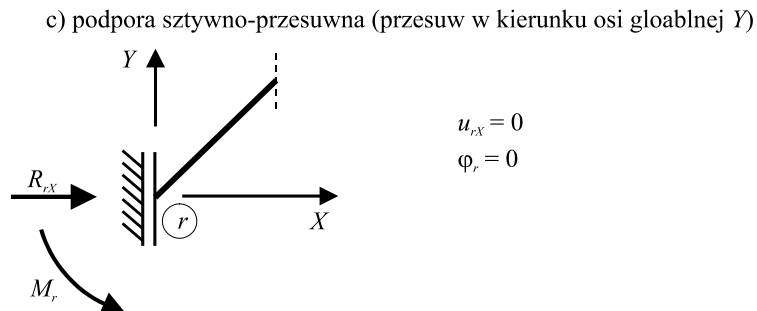
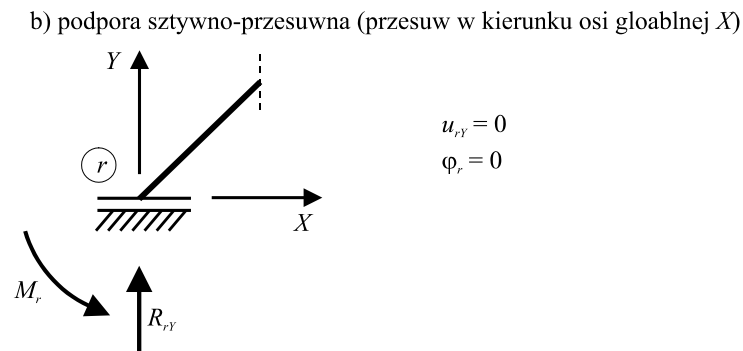
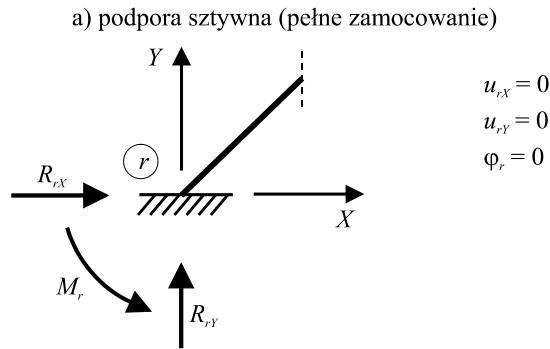
gdź pozostałe przemieszczenia, tzn. \mathbf{u}_1 równe są zeru. Ostatecznie otrzymamy

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1^o - \mathbf{K}_{10}^o (\mathbf{K}_{00}^o)^{-1} \mathbf{f}_0^o. \quad (4.46)$$

W podany sposób można wyeliminować dowolny ze stopni swobody elementu, wymaga to jednak nieco bardziej złożonych przekształceń. Pozostawiamy to zadanie jako ćwiczenie dla uważnych czytelników.

4.4. WARUNKI BRZEGOWE PŁASKICH KONSTRUKCJI RAMOWYCH

Podpory ram płaskich obejmują wszystkie wymienione w rozdz.II podpory przegubowe oraz podpory sztywne, które uniemożliwiają obrót węzła podporowego. Symboliczne oznaczenia tych podpór oraz warunki brzegowe je opisujące pokazane są na Rys.4.6.



Rys.4.6

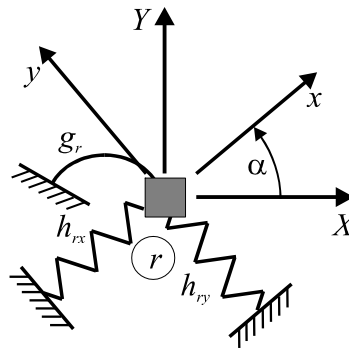
Uwzględnienie warunków brzegowych wymaga modyfikacji globalnej macierzy sztywności konstrukcji i przebiega identycznie jak dla kratownic płaskich (p.2.6), nie będziemy więc szerzej opisywać tu sposobu modyfikacji macierzy. Możliwa jest oczywiście cała gama innych podpór jak przesuwne podpory ukośne, podpory sprężyste, których uwzględnienie również przebiega analogicznie jak w opisanych w rozdz.II przypadkach podpór kratownic.

Jako ogólną metodę uwzględniania nietypowych podpór, proponujemy użycie zamiast nich odpowiednich elementów brzegowych, które opisane będą w następnym punkcie.

4.5. ELEMENTY BRZEGOWE RAM PŁASKICH

Element brzegowy jest wygodnym obejściem problemów jakie napotykamy przy uwzględnieniu różnych, nietypowych warunków brzegowych. Pozwala, co prawda w sposób przybliżony, lecz wystarczająco dokładny, modelować podpory sztywne, sztywno-przesuwne, oraz zastąpić podpory sprężyste.

Przedstawimy teraz pojedynczy dowolnie nachylony element sprężysty, schemat tego elementu i używane oznaczenia pokazuje Rys.4.7.



Rys.4.7

Sztywności sprężyn: h_{rx} oraz h_{ry} są siłami, które trzeba przyłożyć do ich końców, aby wywołać jednostkowe ich wydłużenia. Sztywność obrotu podpory - g_r jest momentem niezbędnym do wywołania obrotu węzła r o kąt jednostkowy.

Macierz sztywności takiego elementu w lokalnym układzie współrzędnych ma postać:

$$\mathbf{K}^b = \begin{bmatrix} h_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & h_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & g_r \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Jej transformacja do układu globalnego przebiega analogicznie jak w przypadku zwykłych elementów ramowych, czy kratowych z tym wyjątkiem, że dotyczy tylko jednego węzła (2.34). Macierz obrotu węzła opisana jest równaniem (4.15). Można, więc zapisać równanie transformujące macierz \mathbf{K}^b do układu globalnego:

$$\mathbf{K}^b = \mathbf{R}_r \mathbf{K}^b \mathbf{R}_r^T. \quad (4.48)$$

Po uwzględnieniu równań (4.15) i (4.47) otrzymamy:

$$\mathbf{K}^b = \begin{bmatrix} c^2 h_{rx} + s^2 h_{ry} & sc(h_{rx} - h_{ry}) & 0 \\ sc(h_{rx} - h_{ry}) & c^2 h_{rx} + s^2 h_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & g_r \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

gdzie $s = \sin \alpha$, $c = \cos \alpha$.

Przy modelowaniu podpór niepodatnych należy założyć dużą sztywność odpowiedniej sprężyny. W większości przypadków sztywność rzędu $1 \cdot 10^{30}$ zapewnia bardzo dobrą zgodność wyników uzyskanych tą metodą z wynikami metody dokładnej.

4.6. SIŁY WEWNĘTRZNE WYWOŁANE OBCIĄŻENIEM STATYCZNYM

Różnorodność obciążeń, które mogą oddziaływać na konstrukcję ramową jest znacznie większa niż była w przypadku kratownicy. Na elementy ramy oddziaływać mogą obciążenia skupione (siły, momenty), ciągłe (ciśnienie, obciążenie momentowe) i termiczne. Ułożenie równań równowagi wymaga zastąpienia obciążeń międzywęzłowych równoważnym układem sił i momentów skupionych, działających na węzły. Sposób redukcji obciążenia do węzłów będzie przedmiotem naszych rozważań w tym punkcie.

Równania (4.17) i (4.22) określają przemieszczenie elementu zginanego w kierunku osi y układu globalnego. Po dodaniu równań opisujących przemieszczenia w kierunku osiowym otrzymamy związki definiujące wektor przemieszczeń dowolnego punktu leżącego między węzłami.

$$\mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} u_x(x) \\ u_y(x) \\ \varphi(x) \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}^e, \quad (4.50)$$

gdzie \mathbf{N} jest prostokątną macierzą funkcji kształtu. Składa się ona z dwóch bloków $\mathbf{N}_i(x)$ - macierzy funkcji kształtu dla węzła początkowego oraz $\mathbf{N}_j(x)$ - macierzy funkcji kształtu węzła końcowego.

$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i(x) & \mathbf{N}_j(x) \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

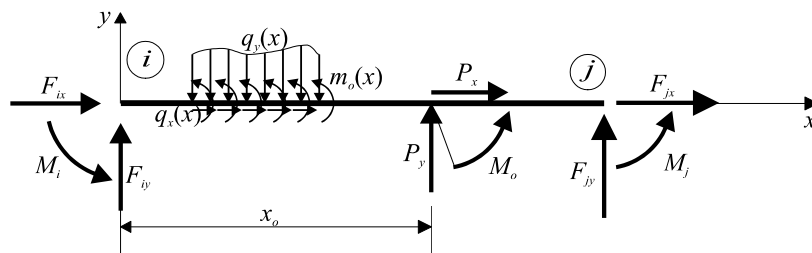
Z równania (4.17) i (2.10) otrzymać można obie macierze:

$$\mathbf{N}_i(x) = \begin{bmatrix} \omega_1(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3(\xi) & L\omega_5(\xi) \\ 0 & \frac{1}{L}\omega_3'(\xi) & \omega_5'(\xi) \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{N}_j(x) = \begin{bmatrix} \omega_2(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \omega_4(\xi) & L\omega_6(\xi) \\ 0 & \frac{1}{L}\omega_4'(\xi) & \omega_6'(\xi) \end{bmatrix},$$

gdzie bezwymiarowe funkcje kształtu $\omega_i(\xi)$ ($i = 1, 2 \dots 6$) oraz ich pochodne $\omega_i'(\xi)$, $\omega_i''(\xi)$, zebrane są w **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania..** Wprowadzono tu wygodną, bezwymiarową współrzędną $\xi = x / L$.

Rozważmy teraz pręt (element) ramy płaskiej obciążony obciążeniem statycznym (Rys.4.8).



Rys.4.8

Siły węzłowe \mathbf{f}^e znajdziemy zapisując warunki równowagi elementu. Skorzystamy z zasady prac wirtualnych:

$$W_n = (\mathbf{f}^e)^T \mathbf{u}^e \quad (4.53a)$$

jest pracą sił węzłowych,

$$W_z = \int_0^L [q_y(x)u_y(x) + q_x(x)u_x(x) + m_o(x)\varphi(x)] dx \quad (4.53b)$$

jest pracą sił zewnętrznych (obciążenia statycznego).

Siły skupione i momenty również można analizować w ten sposób zapisując:

$$q(x) = \delta(x - x_o)P, \quad m_o(x) = \delta(x - x_o)M_o, \quad (4.54)$$

gdzie $\delta(x_o)$ jest dystrybucją delta Dirac'a zdefiniowaną następująco (por. [11]):

$$\delta(x - x_o) = 0, \quad \text{gdy } x < x_o; \quad \delta(x - x_o) \rightarrow \infty, \quad \text{gdy } x = x_o; \quad \delta(x - x_o) = 0, \quad \text{gdy } x > x_o. \quad (4.55)$$

Tab.4.1

Nr	1	2	3	4	5	6
ω_i	$1 - \xi$	ξ	$1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$	$\xi^2(3 - 2\xi)$	$\xi(1 - 2\xi^2 + \xi^3)$	$-\xi^2(1 - \xi)$
wykres ω_i						
ω_i'	-1	1	$-6\xi(1 - \xi)$	$6\xi(1 - \xi)$	$1 - 4\xi + 3\xi^2$	$-\xi(2 - 3\xi)$
wykres ω_i'						
ω_i''	0	0	$-6 + 12\xi$	$6 - 12\xi$	$-4 + 6\xi$	$-2 + 6\xi$
wykres ω_i''						

Równowaga elementu zostanie zachowana, gdy

$W_n + W_z = 0$, tzn.

$$(\mathbf{f}^e)^T \mathbf{u}^e = - \int_0^L [\mathbf{q}(x)]^T \mathbf{u}(x) dx, \quad (4.56)$$

gdzie $\mathbf{q}(x)$ jest wektorem obciążeń zewnętrznych:

$$\mathbf{q}(x) = \begin{bmatrix} q_x(x) \\ q_y(x) \\ m_o(x) \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Wstawiając do (4.56) wyrażenie na wektor przemieszczeń elementu (4.50) otrzymamy:

$$(\mathbf{f}^e)^T \mathbf{u}^e = - \int_0^L \mathbf{q}^T \mathbf{N} \mathbf{u}^e dx, \quad (4.58)$$

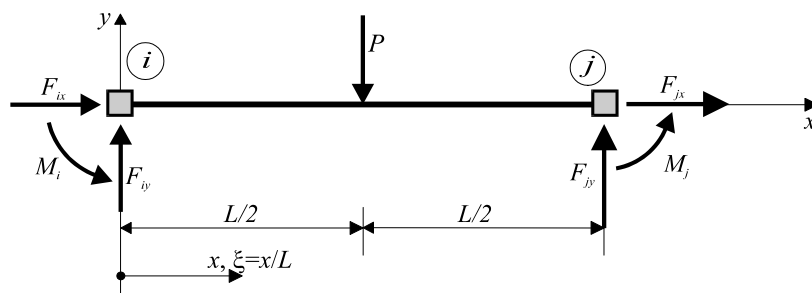
$$(\mathbf{f}^e)^T = - \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{q} dx, \quad (4.59)$$

które umożliwi nam redukcję obciążeń działających na elementy do węzłów. Należy pamiętać, że w równaniach równowagi występują siły działające na węzły, a te są przeciwnie skierowane do sił działających na element (por. rys. 2.11), należy więc odejmować je od wektora sił węzłowych konstrukcji.

Sprawdzimy skuteczność równania (4.59) na trzech prostych przykładach:

- obciążenie siłą skupioną przyłożoną do środka elementu,
- obciążenia momentem skupionym,
- obciążenia ciągłego równomiernie rozłożonego na całym elemencie.

Przykład nr 1.



Rys.4.9

Wprowadzimy dla wygody obliczeń bezwymiarową współrzędną $\xi = x / L$. Siłę skupioną zapiszemy w następująco:

$$\mathbf{q}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ P\delta(\xi - 0.5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

i po wstawieniu do równania (4.59) otrzymamy:

$$\mathbf{f}^{ie} = -\int_0^1 \begin{bmatrix} (\mathbf{N}_i)^T \\ (\mathbf{N}_j)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -P\delta(\xi - 0.5) \\ 0 \end{bmatrix} d\xi = P \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(\xi - 0.5)\omega_3(\xi) \\ L\delta(\xi - 0.5)\omega_5(\xi) \\ 0 \\ \delta(\xi - 0.5)\omega_4(\xi) \\ L\delta(\xi - 0.5)\omega_6(\xi) \end{bmatrix} d\xi =$$

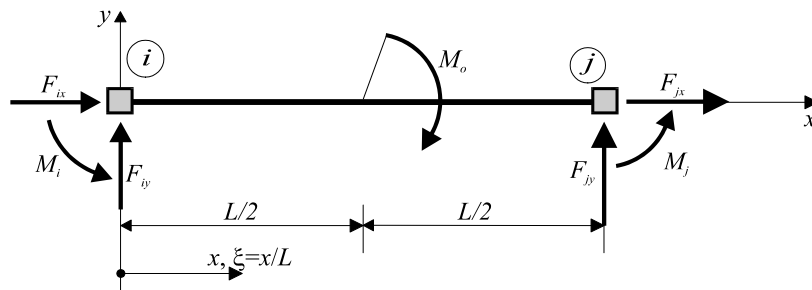
$$= P \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_3(0.5) \\ L\omega_5(0.5) \\ 0 \\ \omega_4(0.5) \\ L\omega_6(0.5) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ L/8 \\ 0 \\ 0.5 \\ -L/8 \end{bmatrix}$$

czyli:

$$F_{ix} = 0, \quad F_{iy} = \frac{1}{2}P, \quad M_i = \frac{1}{8}PL,$$

$$F_{jx} = 0, \quad F_{jy} = \frac{1}{2}P, \quad M_j = -\frac{1}{8}PL.$$

Przykład nr 2.



Rys.4.10

Moment skupiony przyłożony do środka elementu zapisujemy przy pomocy delty Dirac'a:

$$\mathbf{q}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_o \delta(\xi - 0.5) \end{bmatrix}$$

Po wstawieniu wektora obciążenia do równania (4.59) otrzymamy:

$$\mathbf{f}^{e} = M_o \int_0^1 \begin{bmatrix} (\mathbf{N}_i)^T \\ (\mathbf{N}_j)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta(\xi - 0.5) \end{bmatrix} d\xi = M_o \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_3'(\xi) \delta(\xi - 0.5) / L \\ \omega_5'(\xi) \delta(\xi - 0.5) \\ 0 \\ \omega_4'(\xi) \delta(\xi - 0.5) / L \\ \omega_6'(\xi) \delta(\xi - 0.5) \end{bmatrix} d\xi =$$

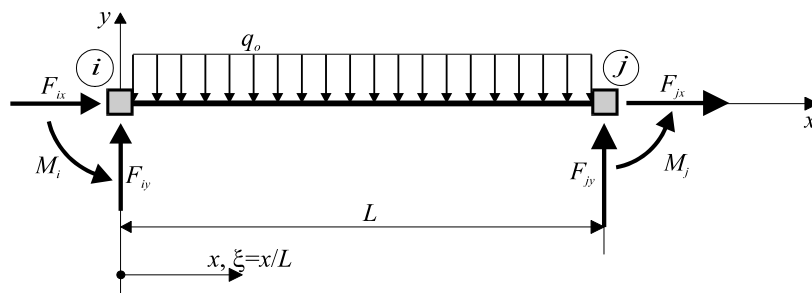
$$= M_o \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2L} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{0}{2L} \\ \frac{3}{2L} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

czyli

$$F_{ix} = 0, \quad F_{iy} = -\frac{3}{2L} M_o, \quad M_i = -\frac{1}{4} M_o,$$

$$F_{jx} = 0, \quad F_{jy} = \frac{3}{2L} M_o, \quad M_j = -\frac{1}{4} M_o.$$

Przykład nr 3.



Rys.4.11

Obciążenie ciągłe równomiernie rozłożone na całej długości elementu daje wektor obciążenia:

$$\mathbf{q}(\xi) = q_o \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Po podstawieniu wektora $\mathbf{q}(\xi)$ do (4.59) otrzymujemy równanie:

$$\mathbf{f}^{e} = q_o L \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_3(\xi) \\ L\omega_5(\xi) \\ 0 \\ \omega_4(\xi) \\ L\omega_6(\xi) \end{bmatrix} d\xi = q_o L \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ L/12 \\ 0 \\ 1/2 \\ -L/12 \end{bmatrix},$$

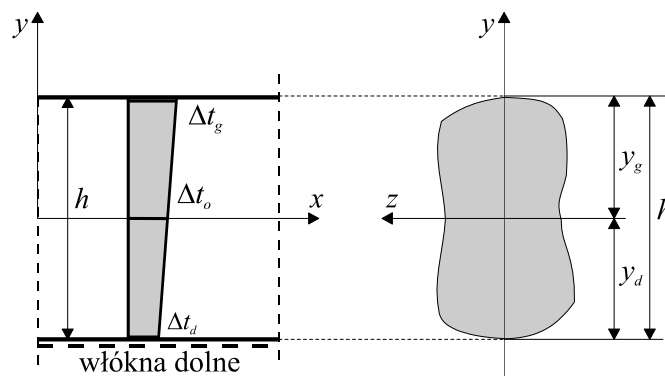
czyli

$$F_{ix} = 0, \quad F_{iy} = \frac{1}{2} q_o L, \quad M_i = \frac{1}{12} q_o L,$$

$$F_{jx} = 0, \quad F_{jy} = \frac{1}{2} q_o L, \quad M_j = -\frac{1}{12} q_o L.$$

4.7. SIŁY WYWOŁANE OBCIĄŻENIEM TERMICZNYM

Oddziaływanie temperatury na elementy ramowe może wywołać ich wygięcie. Dzieje się tak wtedy, gdy pole temperatury w przekroju nie jest jednorodne. W kratownicy wygięcie prętów nie powodowało powstania sił węzłowych, gdyż elementy kratowe połączone są z węzłami przegubowo. Pręty konstrukcji ramowych mogą wywołać obrót węzła, musimy zatem wyznaczyć siły przywęzłowe w elemencie poddanym działaniu nierównomiernego pola temperatury.



Rys.4.12

Rozważmy element, którego włókna „górne” doznały działania przyrostu temperatury Δt_g , a włókna „dolne” przyrostu temperatury Δt_d (Rys.4.12). Pole temperatury zapisać można następująco:

$$\Delta t(x, y) = \Delta t_o(x) + \frac{y}{h} \Delta t_h(x), \quad (4.60)$$

gdzie $\Delta t_o = \frac{1}{h} [\Delta t_d y_g + \Delta t_g y_d]$ jest przyrostem temperatury włókien środkowych,

$\Delta t_h = \Delta t_g - \Delta t_d$ - różnicą temperatur pomiędzy skrajnymi włóknami elementu, h - wysokością przekroju, y_d - odległością środka ciężkości przekroju od włókien dolnych, y_g - odległością środka ciężkości przekroju od włókien górnych.

Odształcenia włókien elementu wywołane polem temperatury są równe:

$$\varepsilon_t(y) = \alpha_t \Delta t(y) = \alpha_t \left(\Delta t_o + \Delta t_h \frac{y}{h} \right), \quad (4.61)$$

gdzie α_t jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej materiału.

Przy braku swobody odształceń pręta, powstają wewnątrz niego naprężenia:

$$\sigma_x = -E\varepsilon_t = -\alpha_t E \left(\Delta t_o + \Delta t_h \frac{y}{h} \right), \quad (4.62)$$

których wypadkowymi są siły wewnętrzne:

$$N = \int_A \sigma_x dA = -\alpha_t E \left(\Delta t_o \int_A dA + \frac{\Delta t_h}{h} \int_A y dA \right). \quad (4.63)$$

Ponieważ drugą z całek występujących w równaniu (4.63) jest momentem statycznym względem osi z , a ta przechodzi przez środek ciężkości przekroju musi być zatem równa zeru. Otrzymamy więc:

$$N_t(x) = -\alpha_t \Delta t_o(x) EA, \quad (4.64)$$

tak samo jak w przypadku pręta kratownicy.

Drugą z sił wewnętrznych, którą wywołują naprężenia termiczne jest moment zginający:

$$M_t(x) = \int_A -\sigma_x(x) y dA = \alpha_t E \left[\Delta t_o(x) \int_A y dA + \frac{\Delta t_h}{h} \int_A y^2 dA \right]. \quad (4.65)$$

Pierwsza całka w tym równaniu musi równać się zeru podobnie jak poprzednio w równaniu (4.63), a druga jest momentem bezwładności przekroju obliczonym względem osi

środkowej. Możemy zatem zapisać równanie momentu zginającego wywołanego naprężeniami termicznymi:

$$M_t(x) = \frac{\alpha_t \Delta t_h(x)}{h} EJ_z, \quad (4.66)$$

gdzie $J_z = \int_A y^2 dA$ jest momentem bezwładności przekroju elementu względem osi z przechodzącej przez środek ciężkości przekroju.

Siły przywęzłowe obliczymy podobnie jak poprzednio (p.4.6), stosując zasadę prac wirtualnych:

$$(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^{ret} = \int_0^L [\boldsymbol{\varepsilon}(x)]^T \mathbf{t}_t dx, \quad (4.67)$$

gdzie

$$\mathbf{t}_t = \begin{bmatrix} N_t(x) \\ 0 \\ M_t(x) \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

jest wektorem sił wewnętrznych wywołanych temperaturą. Zerowy wyraz w drugim wierszu tego wektora wynika stąd, że temperatura nie wywołuje sił poprzecznych w elementach.

$\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ - jest wektorem gradientów przemieszczeń:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \begin{bmatrix} \frac{du_x}{dx} \\ \frac{du_y}{dy} \\ \frac{d\varphi}{dx} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u}^e, \quad (4.69)$$

\mathbf{B} - jest macierzą pochodnych funkcji kształtu:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j]. \quad (4.70)$$

Na podstawie równań (4.52) obliczymy

$$\mathbf{B}_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \omega_1'(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \omega_3'(\xi) & \omega_5'(\xi) \\ 0 & \frac{1}{L^2} \omega_3''(\xi) & \frac{1}{L} \omega_5''(\xi) \end{bmatrix}, \quad (4.71)$$

$$\mathbf{B}_j(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\omega_2'(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L}\omega_4'(\xi) & \omega_6'(\xi) \\ 0 & \frac{1}{L^2}\omega_4''(\xi) & \frac{1}{L}\omega_6''(\xi) \end{bmatrix},$$

gdzie $\omega_i(\xi)$, $\omega_i'(\xi)$, $\omega_i''(\xi)$ ($i = 1, 2 \dots 6$) są bezwymiarowymi funkcjami podanymi w

Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania..

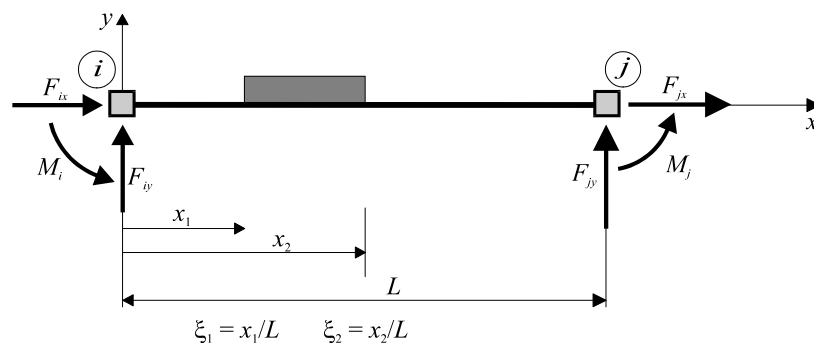
Na podstawie równania (4.67) wyliczymy składowe wektora sił węzłowych:

$$\mathbf{f}^{iet} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{t}_i dx. \quad (4.72)$$

Po wstawieniu do równania (4.72) macierzy (4.71) otrzymamy:

$$\mathbf{f}^{iet} = \alpha_t E \begin{bmatrix} -A \int_{\xi_1}^{\xi_2} \omega_1'(\xi) \Delta t_o(\xi) d\xi \\ \frac{J_z}{hL} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \omega_3''(\xi) \Delta t_h(\xi) d\xi \\ \frac{J_z}{h} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \omega_5''(\xi) \Delta t_h(\xi) d\xi \\ -A \int_{\xi_1}^{\xi_2} \omega_2'(\xi) \Delta t_o(\xi) d\xi \\ \frac{J_z}{hL} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \omega_4''(\xi) \Delta t_h(\xi) d\xi \\ \frac{J_z}{h} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \omega_6''(\xi) \Delta t_h(\xi) d\xi \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

gdzie ξ_1 i ξ_2 są bezwymiarowymi współrzędnymi początku i końca przedziału działania obciążenia termicznego (Rys.4.13).



Rys.4.13

W przypadku, gdy obciążenie termiczne jest stałe i działa na całą długość elementu otrzymamy z (4.52):

$$\mathbf{f}^{et} = \alpha_t E \begin{bmatrix} A\Delta t_o \\ 0 \\ \frac{J_z \Delta t_h}{h} \\ -A\Delta t_o \\ 0 \\ \frac{J_z \Delta t_h}{h} \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

Równanie (4.52) czy też (4.53) opisuje siły wewnętrzne działające na element. Gdy tworzymy wektor obciążeń konstrukcji należy więc odjąć składowe tego wektora od odpowiednich składowych wektora globalnego.

ROZDZIAŁ IV. STATYKA PŁASKICH UKŁADÓW RAMOWYCH	72
4.1. MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU RAMY PŁASKIEJ	73
4.2. TRANSFORMACJA MACIERZY SZTYWNOŚCI Z UKŁADU LOKALNEGO DO GLOBALNEGO	78
4.3. KONDENSACJA STATYCZNA MACIERZY SZTYWNOŚCI.....	80
4.4. WARUNKI BRZEGOWE PŁASKICH KONSTRUKCJI RAMOWYCH.....	84
4.5. ELEMENTY BRZEGOWE RAM PŁASKICH	85
4.6. SIŁY WEWNĘTRZNE WYWOŁANE OBCIĄŻENIEM STATYCZNYM.....	86
4.7. SIŁY WYWOŁANE OBCIĄŻENIEM TERMICZNYM	92