$ORIGIN := 1$

$E := 20GPa$ - *moduł Younga* $\quad Lx := 4 \cdot 10^{-2} \quad Ly := 3 \cdot 10^{-2}$

$\nu := 0.2$ - *współczynnik Poissona*

$t := 0.01m$ - *grubość tarczy*

$N(x, y) := (1 \quad x \quad y \quad x \cdot y)$ - *wielomiany funkcji kształtu*

$dNx(x, y) = \frac{d}{dx} N(x, y)$ - *pochodna wielomianu funkcji kształtu*

$dNx(x, y) := (0 \quad 1 \quad 0 \quad y)$

$dNy(x, y) = \frac{d}{dy} N(x, y)$ - *pochodna wielomianu funkcji kształtu*

$dNy(x, y) := (0 \quad 0 \quad 1 \quad x)$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & xi & yi & xi \cdot yi \\ 1 & xj & yj & xj \cdot yj \\ 1 & xk & yk & xk \cdot yk \\ 1 & xl & yl & xl \cdot yl \end{pmatrix}$$ - *macierz współrzędnych elementu*

$M(x) := stack(N(x_1, x_2), N(x_3, x_4), N(x_5, x_6), N(x_7, x_8))$

$$Ma := M(xa) \qquad Ma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.04 & 0 & 0 \\ 1 & 0.04 & 0.03 & 1.2 \times 10^{-3} \\ 1 & 0 & 0.03 & 0 \end{pmatrix}$$ - *macierz współrzędnych elementu "a"*

$|Ma| = -1.44 \times 10^{-6}$

wektor współrzędnych elementu

$$xa = \begin{pmatrix} xi \\ yi \\ xj \\ yj \\ xk \\ yk \\ xl \\ yl \end{pmatrix} \qquad xa := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Lx \\ 0 \\ Lx \\ Ly \\ 0 \\ Ly \end{pmatrix}$$

$Lss := rows(xa) = 8$ - *liczba stopni swobody elementu*

wektor przemieszczeń elementu

$$u := \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ -0.01 \\ 0.001 \\ -0.002 \\ 0.003 \\ 0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix} \cdot 10^{-1}$$

$A := Lx \cdot Ly$ - *pole powierzchni elementu*

$Va := t \cdot A$ - *objętość elementu*

Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu

$ui := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha i := lsolve(Ma, ui)$ $\alpha i = \begin{pmatrix} 1 \\ -25 \\ -33.333 \\ 833.333 \end{pmatrix}$

$uj := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha j := lsolve(Ma, uj)$ $\alpha j = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \\ -833.333 \end{pmatrix}$

$uk := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha k := lsolve(Ma, uk)$ $\alpha k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 833.333 \end{pmatrix}$

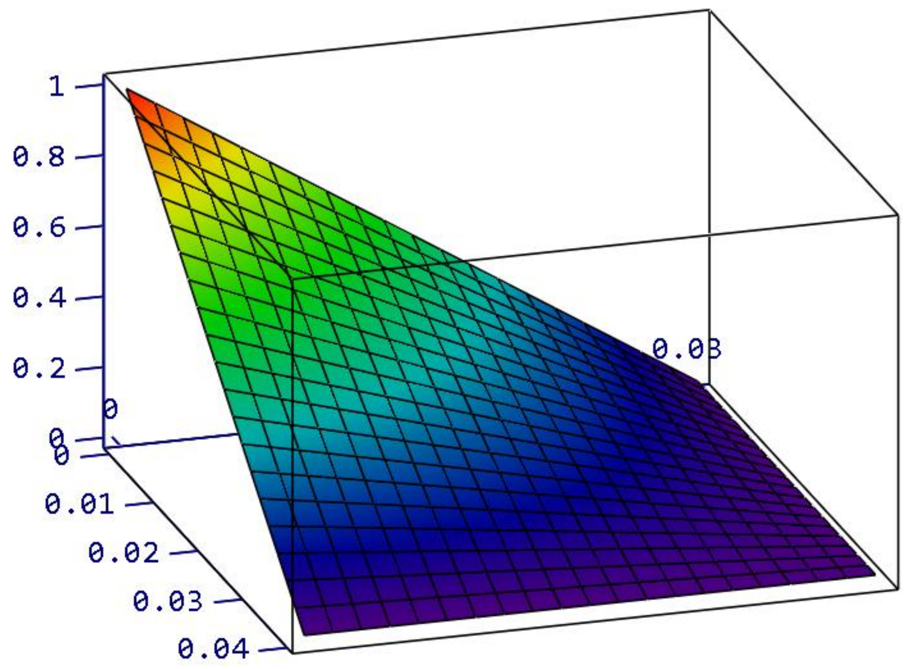
$ul := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\alpha l := lsolve(Ma, ul)$ $\alpha l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 33.333 \\ -833.333 \end{pmatrix}$

$Ni(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha i$ *- funkcja kształtu węzła "i"*

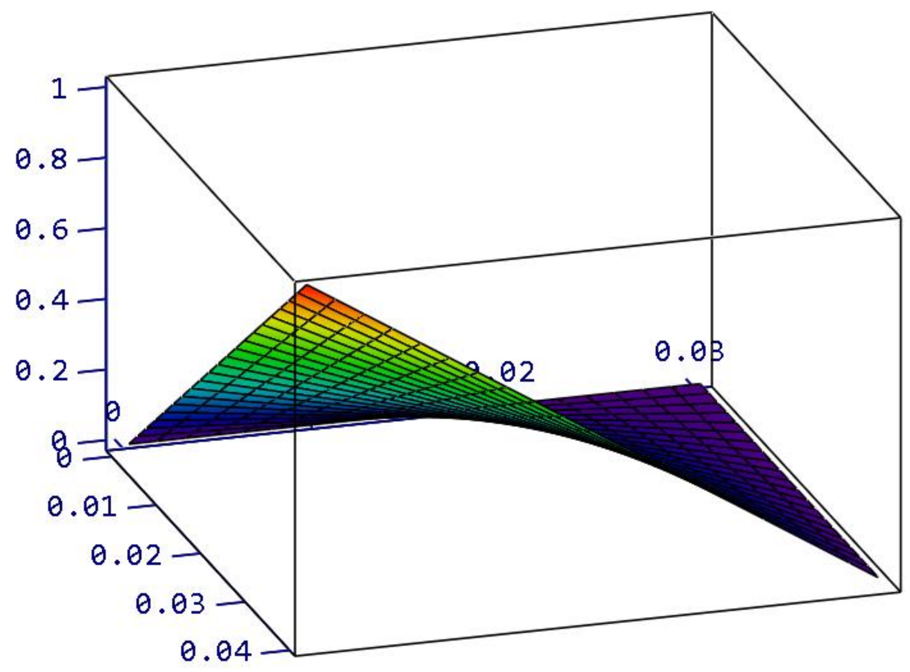
$Nj(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha j$ *- funkcja kształtu węzła "j"*

$Nk(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha k$ *- funkcja kształtu węzła "k"*

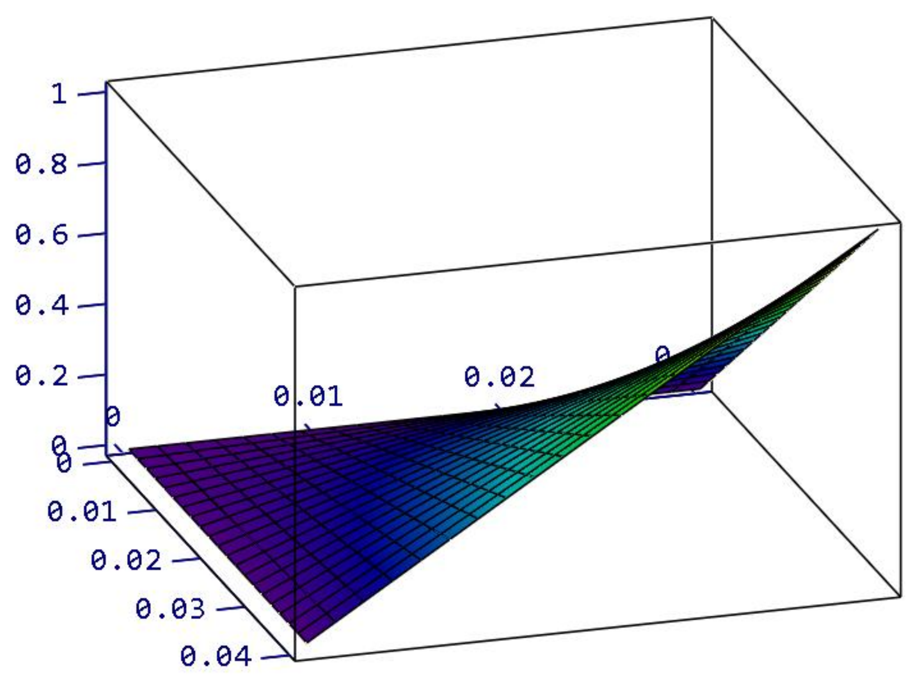
$Nl(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha l$ *- funkcja kształtu węzła "l"*



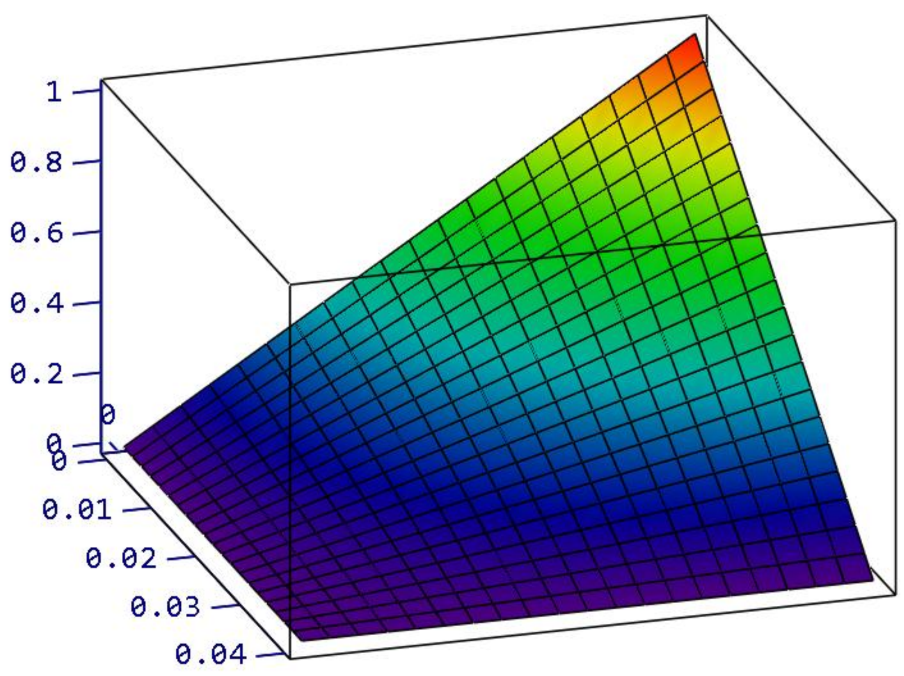
Ni



Nj



Nk



NL

Macierz geometryczna węzła

$$B\alpha(\alpha, x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_2 + y\cdot\alpha_4 & 0 \\ 0 & \alpha_3 + x\cdot\alpha_4 \\ \alpha_3 + x\cdot\alpha_4 & \alpha_2 + y\cdot\alpha_4 \end{pmatrix} \qquad B\alpha(\alpha, x, y) := \begin{pmatrix} dNx(x,y)\cdot\alpha & 0 \\ 0 & dNy(x,y)\cdot\alpha \\ dNy(x,y)\cdot\alpha & dNx(x,y)\cdot\alpha \end{pmatrix}$$

Macierz geometryczna elementu

$$B(x,y) = \left[\begin{pmatrix} \alpha i_2 + y\cdot\alpha i_4 & 0 \\ 0 & \alpha i_3 + x\cdot\alpha i_4 \\ \alpha i_3 + x\cdot\alpha i_4 & \alpha i_2 + y\cdot\alpha i_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha j_2 + y\cdot\alpha j_4 & 0 \\ 0 & \alpha j_3 + x\cdot\alpha j_4 \\ \alpha j_3 + x\cdot\alpha j_4 & \alpha j_2 + y\cdot\alpha j_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha k_2 + y\cdot\alpha k_4 & 0 \\ 0 & \alpha k_3 + x\cdot\alpha k_4 \\ \alpha k_3 + x\cdot\alpha k_4 & \alpha k_2 + y\cdot\alpha k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha l_2 + y\cdot\alpha l_4 & 0 \\ 0 & \alpha l_3 + x\cdot\alpha l_4 \\ \alpha l_3 + x\cdot\alpha l_4 & \alpha l_2 + y\cdot\alpha l_4 \end{pmatrix}\right]$$

$$B(x,y) := augment(B\alpha(\alpha i, x, y), B\alpha(\alpha j, x, y), B\alpha(\alpha k, x, y), B\alpha(\alpha l, x, y))$$

$$Bi := B(xa_1, xa_2) = \begin{pmatrix} -25 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -33.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 33.333 \\ -33.333 & -25 & 0 & 25 & 0 & 0 & 33.333 & 0 \end{pmatrix}$$

- wartości macierzy geometrycznej elementu w węźle "i"

$$D := \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$ *- macierz stałych sprężystych dla PSN*

$$D = \begin{pmatrix} 20.833 & 4.167 & 0 \\ 4.167 & 20.833 & 0 \\ 0 & 0 & 8.333 \end{pmatrix} \cdot GPa$$

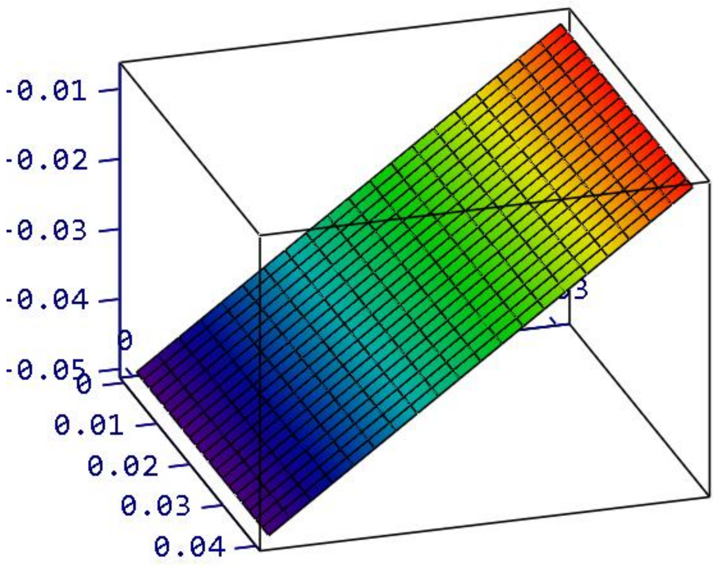
Macierz sztywności elementu LSQ

$$K = \int B^T \cdot D \cdot B \; dV \qquad K = t \left(\int B^T \cdot D \cdot B \; dA \right)$$

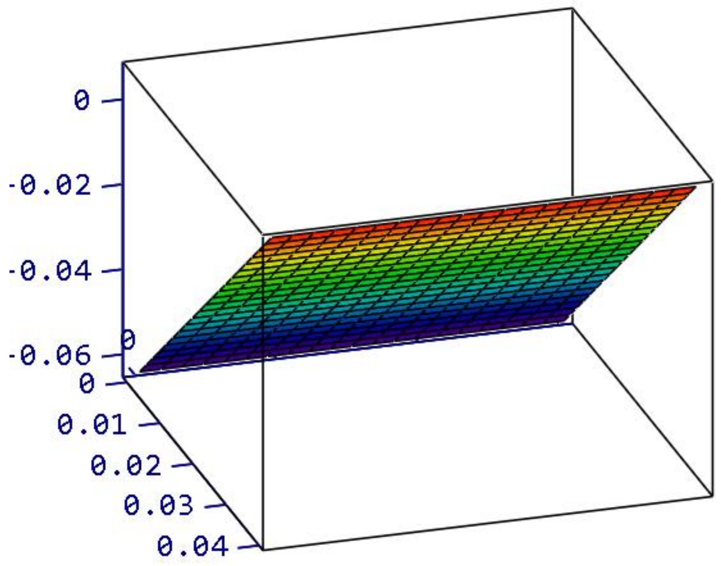
$\varepsilon(x, y) := B(x, y) \cdot u$ *- wektor funkcji odkształceń elementu LSQ*

$n := 1 .. \; Lss$

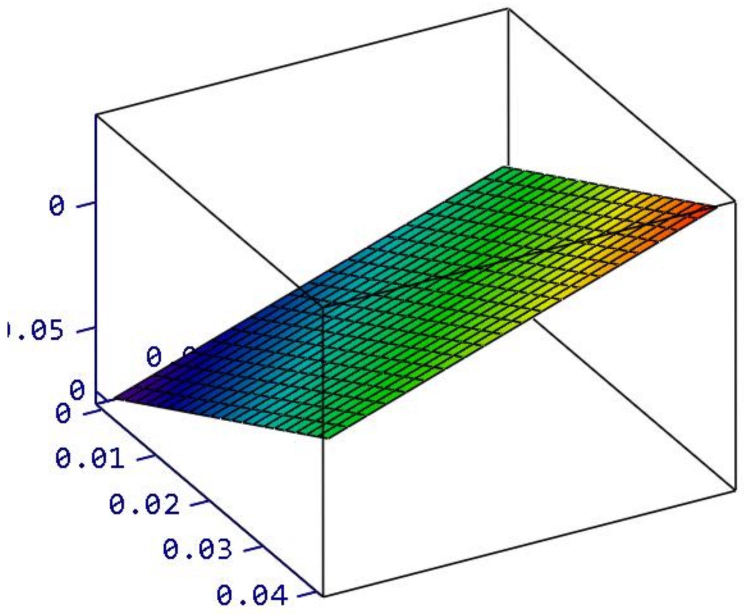
$$\varepsilon x(x, y) := \sum_n \left(B(x, y)_{1, n} \cdot u_n \right) \qquad \varepsilon y(x, y) := \sum_n \left(B(x, y)_{2, n} \cdot u_n \right) \qquad \gamma xy(x, y) := \sum_n \left(B(x, y)_{3, n} \cdot u_n \right)$$



εx



εy



γxy

$$\varepsilon i := \varepsilon\left(xa_1, xa_2\right) = \begin{pmatrix} -0.05 \\ -0.063 \\ -0.078 \end{pmatrix}$$

- wektor odkształceń w węźle "i" elementu czworokątnego

$$\varepsilon i = \begin{pmatrix} -5 \\ -6.333 \\ -7.75 \end{pmatrix} \cdot \%$$

$$\sigma i := D \cdot \varepsilon i = \begin{pmatrix} -1.306 \\ -1.528 \\ -0.646 \end{pmatrix} \cdot GPa$$

- wektor naprężeń w węźle "i" elementu czworokątnego