

Macierze sztywności elementów ram płaskich - Grupa 1

ORIGIN := 1

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

$$\text{Blok_A11} (EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

Blok_B11 (EA, EJ , L , 1) :=

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow -6a$$

$$A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1$$

A

Blok_C11 (EA, EJ , L , 1) :=

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow 6a$$

$$A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1$$

A

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\text{Blok_A01}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok_B01 (EA, EJ, L, 1) :=}$$

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow -3a$$

$$A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1$$

$$A$$

$$\text{Blok_C01 (EA, EJ, L, 1) :=}$$

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow 3a$$

$$A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 0$$

$$A$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Blok_B10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

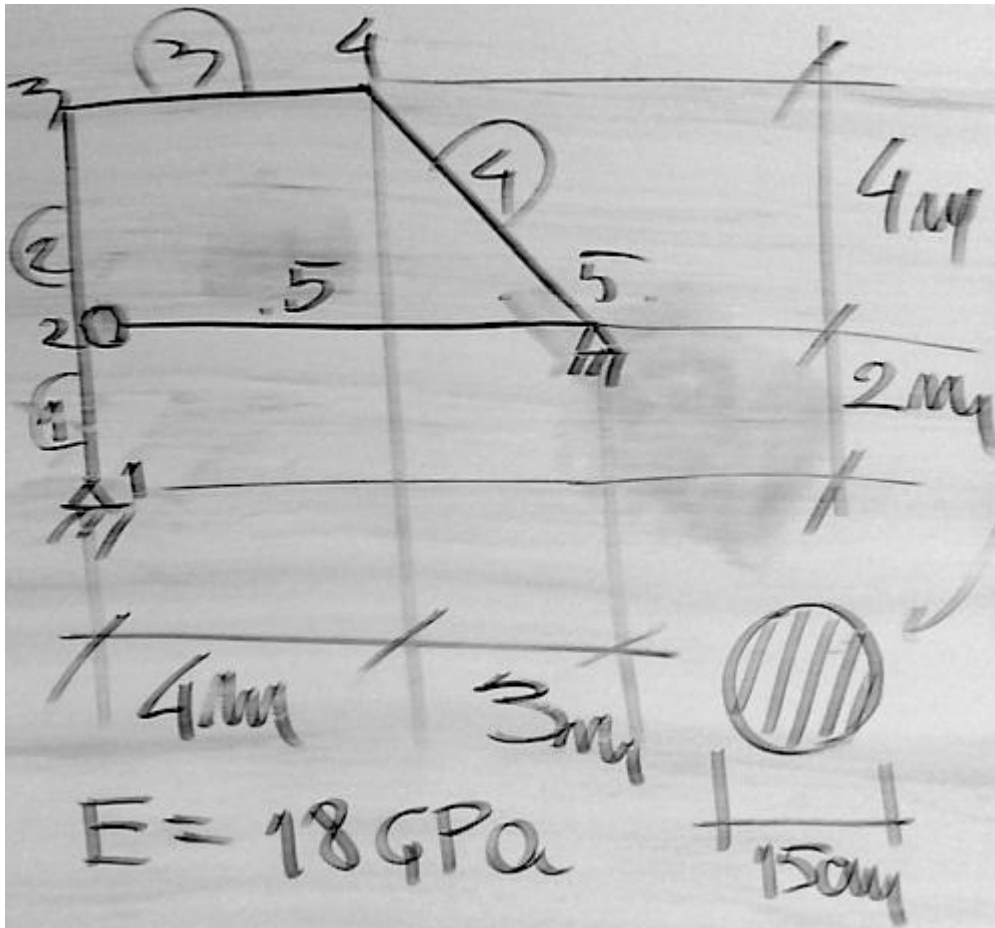
$$\text{Blok_A10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok_C10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

$$E := 18 \text{ GPa} \quad d := 15 \text{ cm} \quad r := \frac{d}{2}$$

$$J := \frac{\pi \cdot r^4}{4} \quad A := \pi \cdot r^2 \quad EA := E \cdot A \quad EJ := E \cdot J$$

$$EA = 318.086 \cdot \text{MN} \quad EJ = 447.309 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^2$$



Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} A^1 \\ C^1 \end{matrix} & & & & \\ & B^1+A^2+A^5 & C^2 & & C^5 \\ & & B^2+A^3 & C^3 & \\ & & & B^3+A^4 & C^4 \\ & & & & B^4+B^5 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

symetria

Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$L_x := 0 \quad L_y := 2\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(L_x)^2 + (L_y)^2} = 2.000000\text{m}$$

$$\underline{A} := \text{Blok_A11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 159043 & 0 & 0 \\ 0 & 671 & 671 \\ 0 & 671 & 895 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 159043 & 0 & 0 \\ 0 & 671 & -671 \\ 0 & -671 & 895 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$\underline{C} := \text{Blok_C11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -159043 & 0 & 0 \\ 0 & -671 & 671 \\ 0 & -671 & 447 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$\underline{\underline{R}} := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & -1.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A1 := \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 671 & 0 & 671 \\ 0 & 159043 & 0 \\ 671 & 0 & 895 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B1 := \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 671 & 0 & -671 \\ 0 & 159043 & 0 \\ -671 & 0 & 895 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C1 := \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} -671 & 0 & 671 \\ 0 & -159043 & 0 \\ -671 & 0 & 447 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 0 \quad \underline{L_y} := 4\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 4\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 79522 & 0 & 0 \\ 0 & 84 & 168 \\ 0 & 168 & 447 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 79522 & 0 & 0 \\ 0 & 84 & -168 \\ 0 & -168 & 447 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -79522 & 0 & 0 \\ 0 & -84 & 168 \\ 0 & -168 & 224 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & -1.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A2 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 84 & 0 & 168 \\ 0 & 79522 & 0 \\ 168 & 0 & 447 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B2 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 84 & 0 & -168 \\ 0 & 79522 & 0 \\ -168 & 0 & 447 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C2 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -84 & 0 & 168 \\ 0 & -79522 & 0 \\ -168 & 0 & 224 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 4\text{m} \quad \underline{L_y} := 0\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 4\text{m}$$

$$\underline{A} := \text{Blok_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 79522 & 0 & 0 \\ 0 & 84 & 168 \\ 0 & 168 & 447 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$\underline{B} := \text{Blok_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 79522 & 0 & 0 \\ 0 & 84 & -168 \\ 0 & -168 & 447 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$\underline{C} := \text{Blok_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} -79522 & 0 & 0 \\ 0 & -84 & 168 \\ 0 & -168 & 224 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A3 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 79522 & 0 & 0 \\ 0 & 84 & 168 \\ 0 & 168 & 447 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B3 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 79522 & 0 & 0 \\ 0 & 84 & -168 \\ 0 & -168 & 447 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C3 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -79522 & 0 & 0 \\ 0 & -84 & 168 \\ 0 & -168 & 224 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "4" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 3\text{m}$$

$$\underline{L_y} := -4\text{m}$$

$$\underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 5\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A11}(\text{EA}, \text{EJ}, L, 1\text{m})$$

$$A = \begin{pmatrix} 63617 & 0 & 0 \\ 0 & 43 & 107 \\ 0 & 107 & 358 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(\text{EA}, \text{EJ}, L, 1\text{m})$$

$$B = \begin{pmatrix} 63617 & 0 & 0 \\ 0 & 43 & -107 \\ 0 & -107 & 358 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C11}(\text{EA}, \text{EJ}, L, 1\text{m})$$

$$C = \begin{pmatrix} -63617 & 0 & 0 \\ 0 & -43 & 107 \\ 0 & -107 & 179 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "4" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.600000 & 0.800000 & 0.000000 \\ -0.800000 & 0.600000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A4 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 22930 & 30516 & -86 \\ 30516 & 40730 & 64 \\ -86 & 64 & 358 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B4 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 22930 & 30516 & 86 \\ 30516 & 40730 & -64 \\ 86 & -64 & 358 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C4 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -22930 & -30516 & -86 \\ -30516 & -40730 & 64 \\ 86 & -64 & 179 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "5" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 7\text{m} \quad \underline{L_y} := 0\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 7\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A01}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 45441 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B01}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 45441 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -27 \\ 0 & -27 & 192 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C01}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -45441 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 27 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "5" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A5 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 45441 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B5 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 45441 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -27 \\ 0 & -27 & 192 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C5 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -45441 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 27 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$