

Macierze sztywności elementów ram płaskich - Grupa 1

ORIGIN := 1

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

$$\text{Blok_A11} (EA, EJ, L, 1) := \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}$$

Blok_B11 (EA, EJ , L , 1) :=

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow -6a$$

$$A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1$$

A

Blok_C11 (EA, EJ , L , 1) :=

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow 6a$$

$$A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1$$

A

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\text{Blok_A01} (EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok_B01 (EA, EJ, L, 1) :=}$$

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow -3a$$

$$A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1$$

$$A$$

$$\text{Blok_C01 (EA, EJ, L, 1) :=}$$

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow 3a$$

$$A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 0$$

$$A$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Blok_B10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$\text{Blok_A10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok_C10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

$$E := 20 \text{ GPa}$$

$$b := 10 \text{ cm}$$

$$h := 16 \text{ cm}$$

$$J := \frac{b \cdot h^3}{12}$$

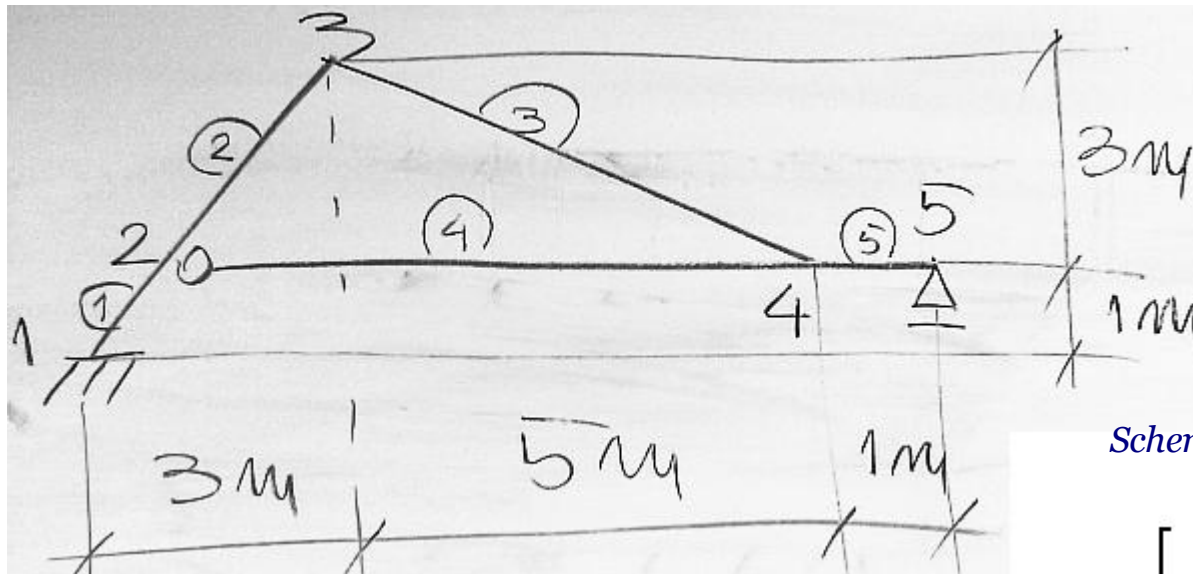
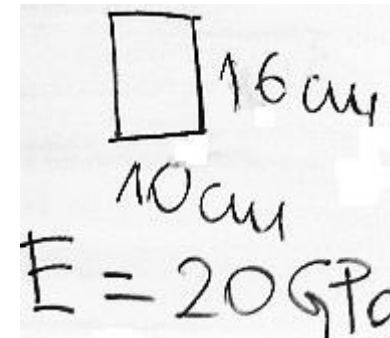
$$A := b \cdot h$$

$$EA := E \cdot A$$

$$EJ := E \cdot J$$

$$EA = 320 \cdot \text{MN}$$

$$EJ = 682.667 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^2$$



Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$K = \begin{bmatrix} A^1 & C^1 & & & \\ & B^1 + A^2 + A^4 & C^2 & C^4 & \\ & & B^2 + A^3 & C^3 & \\ \text{symetria} & & & B^3 + B^4 + A^5 & C^5 \\ & & & & B^5 \end{bmatrix}$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$L_x := \frac{1}{4} \cdot 3\text{m} = 0.75\text{m} \quad L_y := 1\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(L_x)^2 + (L_y)^2} = 1.250000\text{m}$$

$$\underline{A} := \text{Blok_A11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 256000 & 0 & 0 \\ 0 & 4194 & 2621 \\ 0 & 2621 & 2185 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 256000 & 0 & 0 \\ 0 & 4194 & -2621 \\ 0 & -2621 & 2185 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$\underline{C} := \text{Blok_C11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -256000 & 0 & 0 \\ 0 & -4194 & 2621 \\ 0 & -2621 & 1092 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{c} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{s} := \frac{L_y}{L}$$

$$\underline{R} := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.600000 & -0.800000 & 0.000000 \\ 0.800000 & 0.600000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A1 := \underline{R}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{R} = \begin{pmatrix} 94844 & -120867 & 2097 \\ -120867 & 165350 & 1573 \\ 2097 & 1573 & 2185 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B1 := \underline{R}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{R} = \begin{pmatrix} 94844 & -120867 & -2097 \\ -120867 & 165350 & -1573 \\ -2097 & -1573 & 2185 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C1 := \underline{R}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{R} = \begin{pmatrix} -94844 & 120867 & 2097 \\ 120867 & -165350 & 1573 \\ -2097 & -1573 & 1092 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := \frac{3 \cdot 3\text{m}}{4} = 2.25\text{m} \quad \underline{L_y} := 3\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 3.75\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A11}(\text{EA}, \text{EJ}, L, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 85333 & 0 & 0 \\ 0 & 155 & 291 \\ 0 & 291 & 728 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(\text{EA}, \text{EJ}, L, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 85333 & 0 & 0 \\ 0 & 155 & -291 \\ 0 & -291 & 728 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C11}(\text{EA}, \text{EJ}, L, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -85333 & 0 & 0 \\ 0 & -155 & 291 \\ 0 & -291 & 364 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{Lx}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.600000 & -0.800000 & 0.000000 \\ 0.800000 & 0.600000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A2 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 30819 & -40885 & 233 \\ -40885 & 54669 & 175 \\ 233 & 175 & 728 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B2 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 30819 & -40885 & -233 \\ -40885 & 54669 & -175 \\ -233 & -175 & 728 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C2 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -30819 & 40885 & 233 \\ 40885 & -54669 & 175 \\ -233 & -175 & 364 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 5\text{m} \quad \underline{L_y} := -3\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 5.830952\text{m}$$

$$\underline{A} := \text{Blok_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 54880 & 0 & 0 \\ 0 & 41 & 120 \\ 0 & 120 & 468 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$\underline{B} := \text{Blok_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 54880 & 0 & 0 \\ 0 & 41 & -120 \\ 0 & -120 & 468 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$\underline{C} := \text{Blok_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} -54880 & 0 & 0 \\ 0 & -41 & 120 \\ 0 & -120 & 234 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.857493 & 0.514496 & 0.000000 \\ -0.514496 & 0.857493 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A3 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 40364 & 24193 & -62 \\ 24193 & 14557 & 103 \\ -62 & 103 & 468 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B3 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 40364 & 24193 & 62 \\ 24193 & 14557 & -103 \\ 62 & -103 & 468 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C3 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -40364 & -24193 & -62 \\ -24193 & -14557 & 103 \\ 62 & -103 & 234 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "4" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 5\text{m} + \frac{3 \cdot 3\text{m}}{4} = 7.25\text{m} \quad \underline{L_y} := 0\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 7.25\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A01}(\text{EA}, \text{EJ}, L, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 44138 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B01}(\text{EA}, \text{EJ}, L, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 44138 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -39 \\ 0 & -39 & 282 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C01}(\text{EA}, \text{EJ}, L, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -44138 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 39 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "4" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A4 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 44138 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B4 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 44138 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -39 \\ 0 & -39 & 282 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C4 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -44138 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 39 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "5" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 1\text{ m} \quad \underline{L_y} := 0\text{ m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 1\text{ m}$$

$$A := \text{Blok_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{ m}) \quad A = \begin{pmatrix} 320000 & 0 & 0 \\ 0 & 8192 & 4096 \\ 0 & 4096 & 2731 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{ m}) \quad B = \begin{pmatrix} 320000 & 0 & 0 \\ 0 & 8192 & -4096 \\ 0 & -4096 & 2731 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{ m}) \quad C = \begin{pmatrix} -320000 & 0 & 0 \\ 0 & -8192 & 4096 \\ 0 & -4096 & 1365 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "5" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A5 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 320000 & 0 & 0 \\ 0 & 8192 & 4096 \\ 0 & 4096 & 2731 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B5 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 320000 & 0 & 0 \\ 0 & 8192 & -4096 \\ 0 & -4096 & 2731 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C5 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -320000 & 0 & 0 \\ 0 & -8192 & 4096 \\ 0 & -4096 & 1365 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$