

Macierze sztywności elementów ram płaskich - Grupa 2

ORIGIN := 1

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

$$\text{Blok_A11} (EA, EJ, L, 1) := \begin{cases} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{cases}$$

Blok_B11 (EA, EJ , L , 1) :=

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow -6a$$

$$A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1$$

A

Blok_C11 (EA, EJ , L , 1) :=

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow 6a$$

$$A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1$$

A

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\text{Blok_A01} (EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok_B01} (EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok_C01} (EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Blok_B10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$\text{Blok_A10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok_C10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

Macierze sztywności - Grupa 2

$$E := 12 \text{ GPa}$$

$$b := 6 \text{ cm}$$

$$h := 12 \text{ cm}$$

$$J := \frac{b \cdot h^3}{12}$$

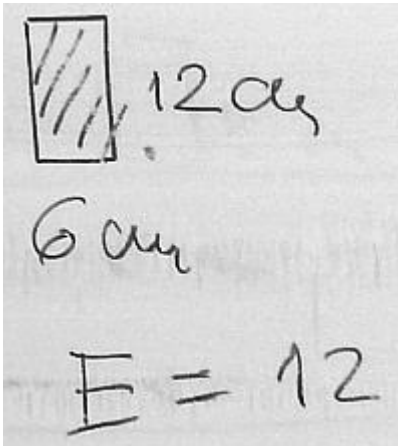
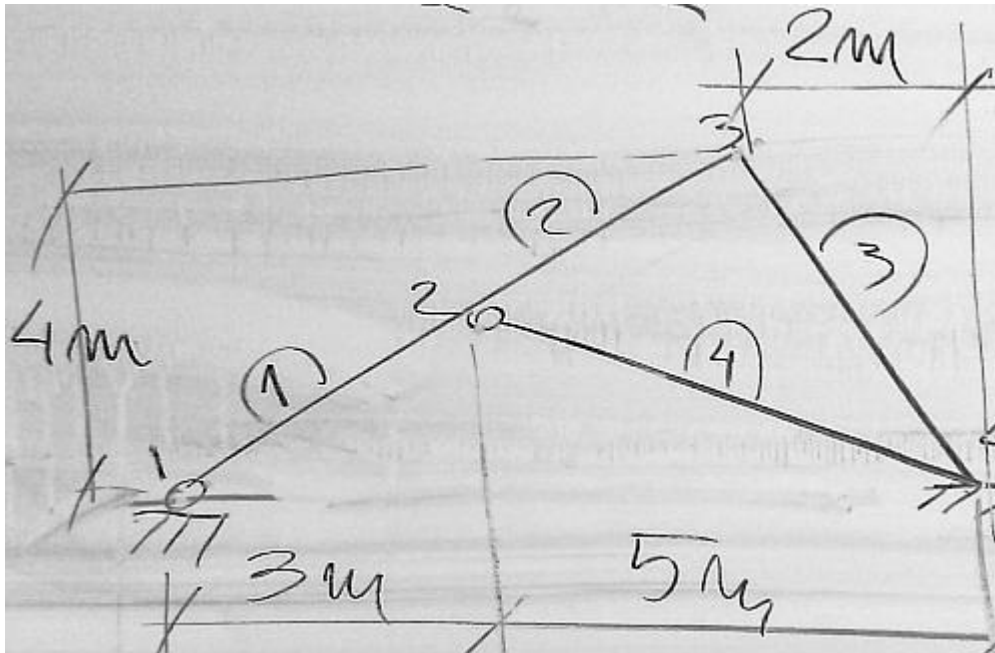
$$A := b \cdot h$$

$$EA := E \cdot A$$

$$EJ := E \cdot J$$

$$EA = 86.4 \cdot \text{MN}$$

$$EJ = 103.68 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^2$$



Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$K = \begin{bmatrix} A^1 & C^1 & & \\ & B^1 + A^2 + A^4 & C^2 & C^4 \\ & & B^2 + A^3 & C^3 \\ \text{symetria} & & & B^3 + B^4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$L_x := 3\text{m} \quad L_y := 2\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(L_x)^2 + (L_y)^2} = 3.605551\text{m}$$

$$\underline{A} := \text{Blok_A11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 23963 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 48 \\ 0 & 48 & 115 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 23963 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & -48 \\ 0 & -48 & 115 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$\underline{C} := \text{Blok_C11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -23963 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 48 \\ 0 & -48 & 58 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$\underline{\underline{R}} := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.832050 & -0.554700 & 0.000000 \\ 0.554700 & 0.832050 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A1 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 16598 & -11048 & 27 \\ -11048 & 7392 & 40 \\ 27 & 40 & 115 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B1 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 16598 & -11048 & -27 \\ -11048 & 7392 & -40 \\ -27 & -40 & 115 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C1 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -16598 & 11048 & 27 \\ 11048 & -7392 & 40 \\ -27 & -40 & 58 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$L_x := 3\text{m}$$

$$L_y := 2\text{m}$$

$$L := \sqrt{(L_x)^2 + (L_y)^2} = 3.605551\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A11}(EA, EJ, L, 1\text{m})$$

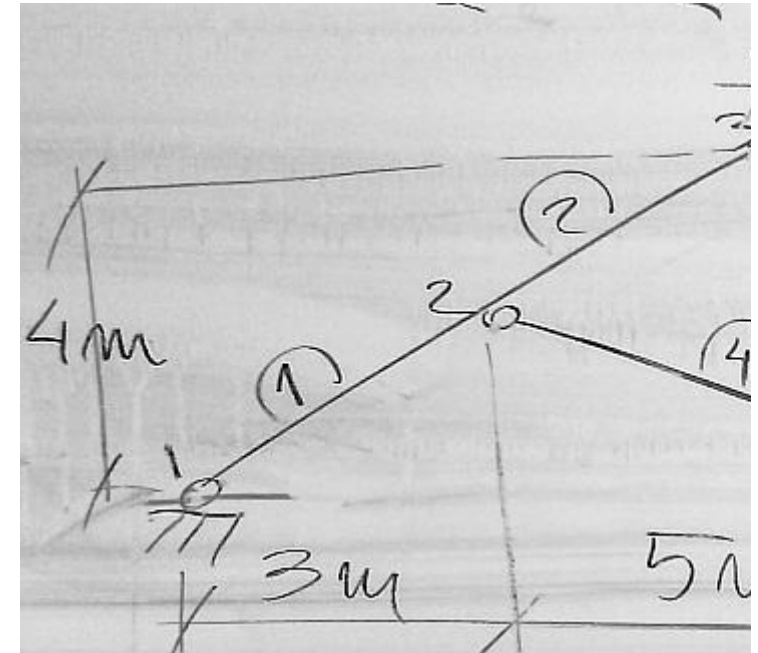
$$A = \begin{pmatrix} 23963 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 48 \\ 0 & 48 & 115 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(EA, EJ, L, 1\text{m})$$

$$B = \begin{pmatrix} 23963 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & -48 \\ 0 & -48 & 115 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C11}(EA, EJ, L, 1\text{m})$$

$$C = \begin{pmatrix} -23963 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 48 \\ 0 & -48 & 58 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$



Element "2" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{Lx}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.832050 & -0.554700 & 0.000000 \\ 0.554700 & 0.832050 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A2 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 16598 & -11048 & 27 \\ -11048 & 7392 & 40 \\ 27 & 40 & 115 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B2 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 16598 & -11048 & -27 \\ -11048 & 7392 & -40 \\ -27 & -40 & 115 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C2 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -16598 & 11048 & 27 \\ 11048 & -7392 & 40 \\ -27 & -40 & 58 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 2\text{m} \quad \underline{L_y} := -4\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 4.472136\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 19320 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 31 \\ 0 & 31 & 93 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 19320 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -31 \\ 0 & -31 & 93 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -19320 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 31 \\ 0 & -31 & 46 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.447214 & 0.894427 & 0.000000 \\ -0.894427 & 0.447214 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A3 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 3875 & 7722 & -28 \\ 7722 & 15458 & 14 \\ -28 & 14 & 93 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B3 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 3875 & 7722 & 28 \\ 7722 & 15458 & -14 \\ 28 & -14 & 93 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C3 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -3875 & -7722 & -28 \\ -7722 & -15458 & 14 \\ 28 & -14 & 46 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "4" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 5\text{m} \quad \underline{L_y} := -2\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 5.385165\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A01}(\text{EA}, \text{EJ}, L, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 16044 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B01}(\text{EA}, \text{EJ}, L, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 16044 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -11 \\ 0 & -11 & 58 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C01}(\text{EA}, \text{EJ}, L, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -16044 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "4" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.928477 & 0.371391 & 0.000000 \\ -0.371391 & 0.928477 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A4 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 13831 & 5532 & 0 \\ 5532 & 2215 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B4 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 13831 & 5532 & 4 \\ 5532 & 2215 & -10 \\ 4 & -10 & 58 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C4 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -13831 & -5532 & -4 \\ -5532 & -2215 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$