Macierze sztywności elementów ram płaskich - Grupa 1

ORIGIN := 1

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

$$\text{Blok\_A11}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$\text{Blok\_B11}(EA, EJ, L, l) := \left|\begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}\right.$$

$$\text{Blok\_C11}(EA, EJ, L, l) := \left|\begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}\right.$$

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\mathtt{Blok\_A01}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Blok\_B01}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Blok\_C01}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$\mathrm{Blok\_A10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Blok\_B10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

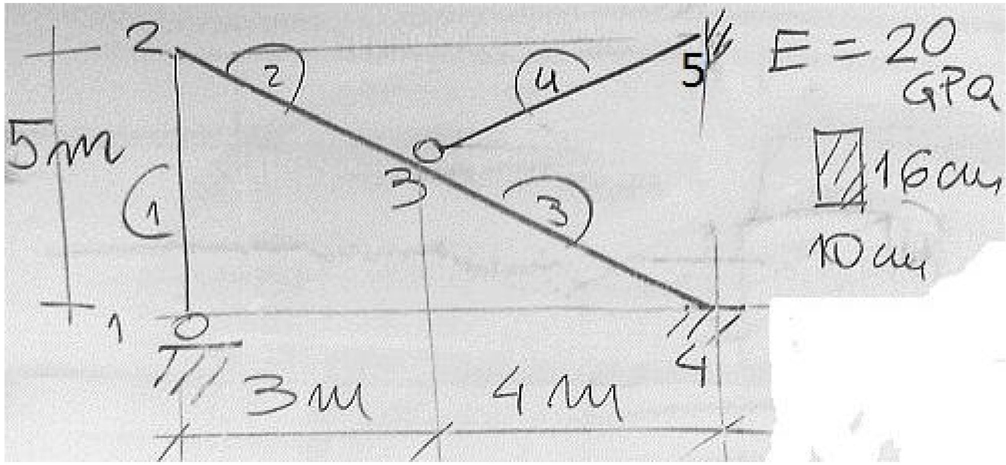
$$\mathrm{Blok\_C10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

Macierze sztywności - Grupa 1

$E := 20\text{GPa} \qquad b := 10\text{cm} \qquad h := 16\text{cm}$

$J := \dfrac{b \cdot h^3}{12} \qquad A := b \cdot h \qquad EA := E \cdot A \qquad EJ := E \cdot J$

$EA = 320 \cdot \text{MN} \qquad EJ = 682.667 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^2$



Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$
\mathbf{K} = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} \;\;1\;\; & \;\;2\;\; & \;\;3\;\; & \;\;4\;\; & \;\;5\;\; \end{array} & \\
\left[\begin{array}{ccccc}
A^1 & C^1 & & & \\
 & B^1+A^2 & C^2 & & \\
 & & B^2+A^3+A^4 & C^3 & C^4 \\
 & \text{symetria} & & B^3 & \\
 & & & & B^4
\end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}
$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 0m = 0$ $\qquad$ $Ly := 5m$ $\qquad$ $L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 5.000000\,m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m)$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} 64000 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 164 \\ 0 & 164 & 546 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m)$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 64000 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & -164 \\ 0 & -164 & 546 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m)$ $\qquad$ $C = \begin{pmatrix} -64000 & 0 & 0 \\ 0 & -66 & 164 \\ 0 & -164 & 273 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

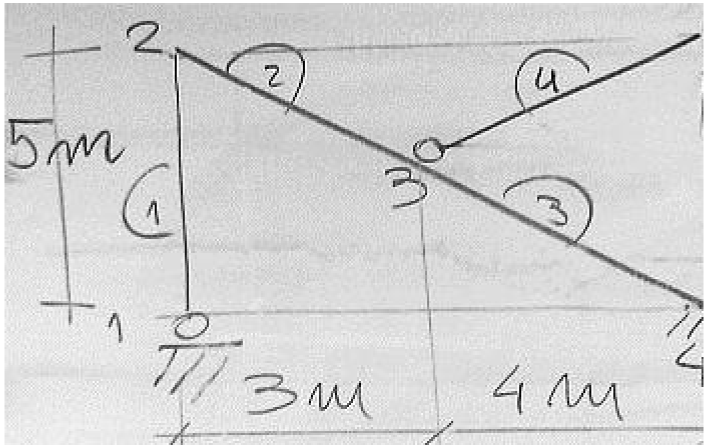
$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & -1.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A1 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 66 & 0 & 164 \\ 0 & 64000 & 0 \\ 164 & 0 & 546 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B1 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 66 & 0 & -164 \\ 0 & 64000 & 0 \\ -164 & 0 & 546 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C1 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -66 & 0 & 164 \\ 0 & -64000 & 0 \\ -164 & 0 & 273 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych



$Lx := 3m = 3\,m$ $\quad Ly := \frac{-3}{7} \cdot 5m$ $\quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 3.686711\,m$

$A := \text{Blok\_A11}(EA, EJ, L, 1m)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 86798 & 0 & 0 \\ 0 & 163 & 301 \\ 0 & 301 & 741 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := \text{Blok\_B11}(EA, EJ, L, 1m)$ $\quad B = \begin{pmatrix} 86798 & 0 & 0 \\ 0 & 163 & -301 \\ 0 & -301 & 741 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := \text{Blok\_C11}(EA, EJ, L, 1m)$ $\quad C = \begin{pmatrix} -86798 & 0 & 0 \\ 0 & -163 & 301 \\ 0 & -301 & 370 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.813733 & 0.581238 & 0.000000 \\ -0.581238 & 0.813733 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$

macierz obrotu

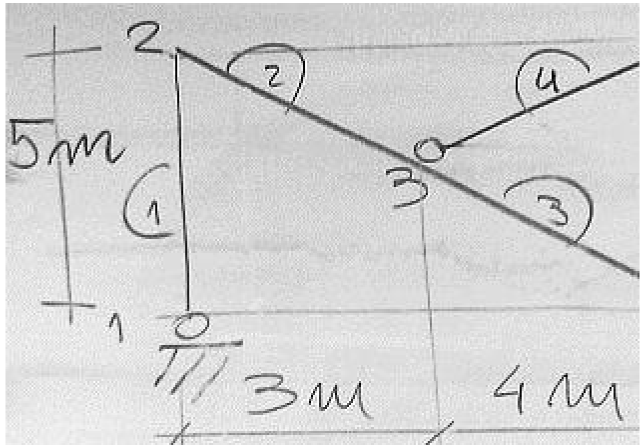
$$A2 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 57530 & 40976 & -175 \\ 40976 & 29432 & 245 \\ -175 & 245 & 741 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B2 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 57530 & 40976 & 175 \\ 40976 & 29432 & -245 \\ 175 & -245 & 741 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C2 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -57530 & -40976 & -175 \\ -40976 & -29432 & 245 \\ 175 & -245 & 370 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 4m \qquad Ly := \frac{-4}{7}5m \qquad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 4.915614m$



$A := \mathrm{Blok\_A11}(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 65099 & 0 & 0 \\ 0 & 69 & 170 \\ 0 & 170 & 556 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := \mathrm{Blok\_B11}(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 65099 & 0 & 0 \\ 0 & 69 & -170 \\ 0 & -170 & 556 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := \mathrm{Blok\_C11}(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -65099 & 0 & 0 \\ 0 & -69 & 170 \\ 0 & -170 & 278 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

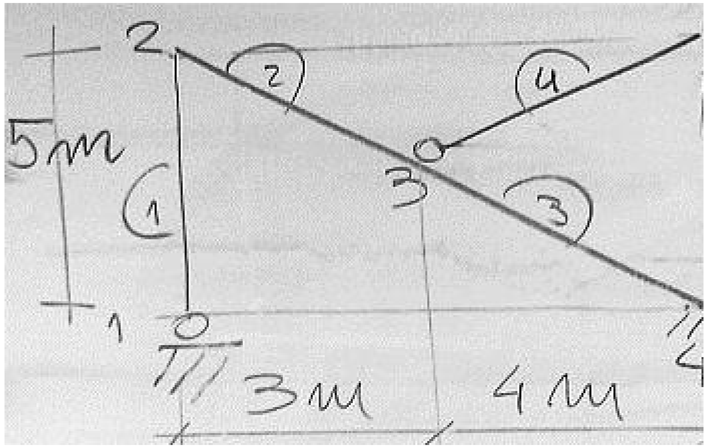
$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.813733 & 0.581238 & 0.000000 \\ -0.581238 & 0.813733 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A3 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 43129 & 30757 & -99 \\ 30757 & 22038 & 138 \\ -99 & 138 & 556 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B3 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 43129 & 30757 & 99 \\ 30757 & 22038 & -138 \\ 99 & -138 & 556 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C3 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -43129 & -30757 & -99 \\ -30757 & -22038 & 138 \\ 99 & -138 & 278 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "4" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych



$Lx := 4m \qquad Ly := \frac{3}{7} \cdot 5m \qquad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 4.537823\,m$

$A := \text{Blok\_A01}(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 70518 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := \text{Blok\_B01}(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 70518 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & -99 \\ 0 & -99 & 451 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := \text{Blok\_C01}(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -70518 & 0 & 0 \\ 0 & -22 & 99 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "4" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.881480 & -0.472221 & 0.000000 \\ 0.472221 & 0.881480 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A4 := R^{T} \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 54798 & -29344 & 0 \\ -29344 & 15742 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B4 := R^{T} \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 54798 & -29344 & -47 \\ -29344 & 15742 & -88 \\ -47 & -88 & 451 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C4 := R^{T} \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -54798 & 29344 & 47 \\ 29344 & -15742 & 88 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot kN$$