

ORIGIN := 1

$E := 20 \text{ GPa}$ - moduł Younga

$\nu := 0.2$ - współczynnik Poissona

$t := 0.01 \text{ m}$ - grubość tarczy

$N(x, y) := (1 \ x \ y)$ - wielomiany funkcji kształtu

$dN_x(x, y) = \frac{d}{dx} N(x, y)$
- pochodna wielomianu funkcji kształtu

$dN_x := (0 \ 1 \ 0)$

$dN_y(x, y) = \frac{d}{dy} N(x, y)$
- pochodna wielomianu funkcji kształtu

$dN_y := (0 \ 0 \ 1)$

$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}$ - macierz współrzędnych elementu

$M(x) := \text{stack}(N(x_1, x_2), N(x_3, x_4), N(x_5, x_6))$

$Ma := M(xa)$ $Ma = \begin{pmatrix} 1 & -0.02 & 0 \\ 1 & 0.04 & -0.02 \\ 1 & 0 & 0.04 \end{pmatrix}$ - macierz współrzędnych elementu "a"

$|Ma| = 2.8 \times 10^{-3}$ - podwojone pole powierzchni elementu

$Va := \frac{t}{2} \cdot |Ma|$ - objętość elementu

Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu

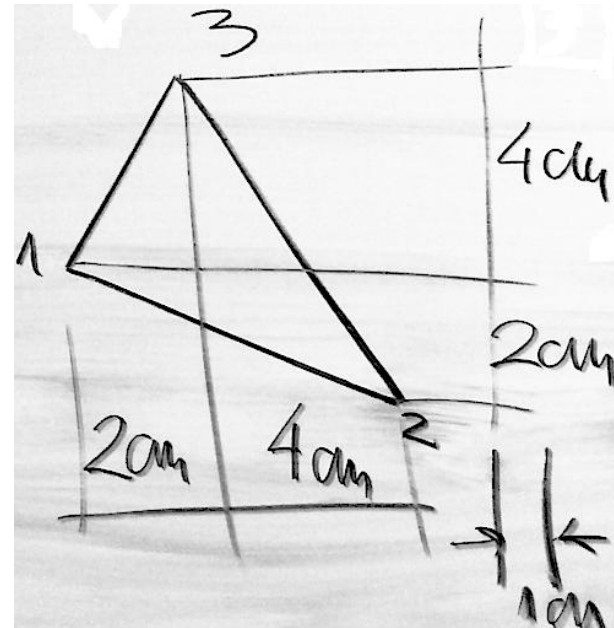
$u_i := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_i := \text{lsolve}(Ma, u_i)$ $u_j := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_j := \text{lsolve}(Ma, u_j)$ $u_k := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\alpha_k := \text{lsolve}(Ma, u_k)$

$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0.571 \\ -21.429 \\ -14.286 \end{pmatrix}$ $\alpha_j = \begin{pmatrix} 0.286 \\ 14.286 \\ -7.143 \end{pmatrix}$ $\alpha_k = \begin{pmatrix} 0.143 \\ 7.143 \\ 21.429 \end{pmatrix}$

wektor współrzędnych elementu

wektor przemieszczeń elementu

$$xa = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \end{pmatrix} \quad xa := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} \quad u := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$



$$M^e = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_i(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_i \quad \text{- funkcja kształtu węzła "i"}$$

$$N_j(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_j \quad \text{- funkcja kształtu węzła "j"}$$

$$N_k(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_k \quad \text{- funkcja kształtu węzła "k"}$$

$$B_\alpha(\alpha) := \begin{pmatrix} dN_x \cdot \alpha & 0 \\ 0 & dN_y \cdot \alpha \\ dN_y \cdot \alpha & dN_x \cdot \alpha \end{pmatrix} \quad \text{- macierz geometryczna węzła}$$

$$B := \text{augment}(B_\alpha(\alpha_i), B_\alpha(\alpha_j), B_\alpha(\alpha_k)) \quad \text{- macierz geometryczna elementu}$$

$$B = \begin{pmatrix} -21.429 & 0 & 14.286 & 0 & 7.143 & 0 \\ 0 & -14.286 & 0 & -7.143 & 0 & 21.429 \\ -14.286 & -21.429 & -7.143 & 14.286 & 21.429 & 7.143 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} := B \cdot u = \begin{pmatrix} -7.1429 \\ -4.2857 \\ -2.8571 \end{pmatrix} \cdot \% \quad \text{- wektor odkształceń elementu CST}$$

$$D := \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix}$$

- macierz stałych sprężystych dla PSN

$$D = \begin{pmatrix} 20.833 & 4.167 & 0 \\ 4.167 & 20.833 & 0 \\ 0 & 0 & 8.333 \end{pmatrix} \cdot GPa$$

Macierz sztywności elementu CST

$$K = \int B^T \cdot D \cdot B \, dV$$

$$K_{\text{CST}} := B^T \cdot D \cdot B \cdot Va$$

$$K = \begin{pmatrix} 1577.4 & 535.7 & -773.8 & -148.8 & -803.6 & -386.9 \\ 535.7 & 1131.0 & 59.5 & -59.5 & -595.2 & -1071.4 \\ -773.8 & 59.5 & 654.8 & -178.6 & 119.0 & 119.0 \\ -148.8 & -59.5 & -178.6 & 386.9 & 327.4 & -327.4 \\ -803.6 & -595.2 & 119.0 & 327.4 & 684.5 & 267.9 \\ -386.9 & -1071.4 & 119.0 & -327.4 & 267.9 & 1398.8 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{cm}$$

$$\varepsilon := B \cdot u = \begin{pmatrix} -7.1429 \\ -4.2857 \\ -2.8571 \end{pmatrix} \cdot \% \quad - \text{wektor odkształceń elementu CST}$$

$$\sigma := D \cdot \varepsilon = \begin{pmatrix} -1.667 \times 10^3 \\ -1.19 \times 10^3 \\ -238.095 \end{pmatrix} \cdot MPa \quad - \text{wektor naprężeń w elemencie przy PSN}$$

$$D2 := \frac{E}{(1 - \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33.333 & 8.333 & 0 \\ 8.333 & 33.333 & 0 \\ 0 & 0 & 12.5 \end{pmatrix} \cdot GPa \quad - \text{macierz stałych sprężystych dla PSO}$$

$$\sigma_{\text{ww}} := D2 \cdot \varepsilon = \begin{pmatrix} -2.738 \times 10^3 \\ -2.024 \times 10^3 \\ -357.143 \end{pmatrix} \cdot MPa \quad - \text{wektor naprężeń w elemencie przy PSO}$$