Macierze sztywności elementów ram płaskich - Grupa 2

$ORIGIN := 1$

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

$$\text{Blok\_A11}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathtt{Blok\_B11}(EA, EJ, L, \mathtt{l}) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{\mathtt{l}} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathtt{Blok\_C11}(EA, EJ, L, \mathtt{l}) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{\mathtt{l}} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\mathtt{Blok\_A01}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$$\text{Blok\_B01}(EA, EJ, L, l) := \left|\begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}\right.$$

$$\text{Blok\_C01}(EA, EJ, L, l) := \left|\begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array}\right.$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$\mathrm{Blok\_A10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

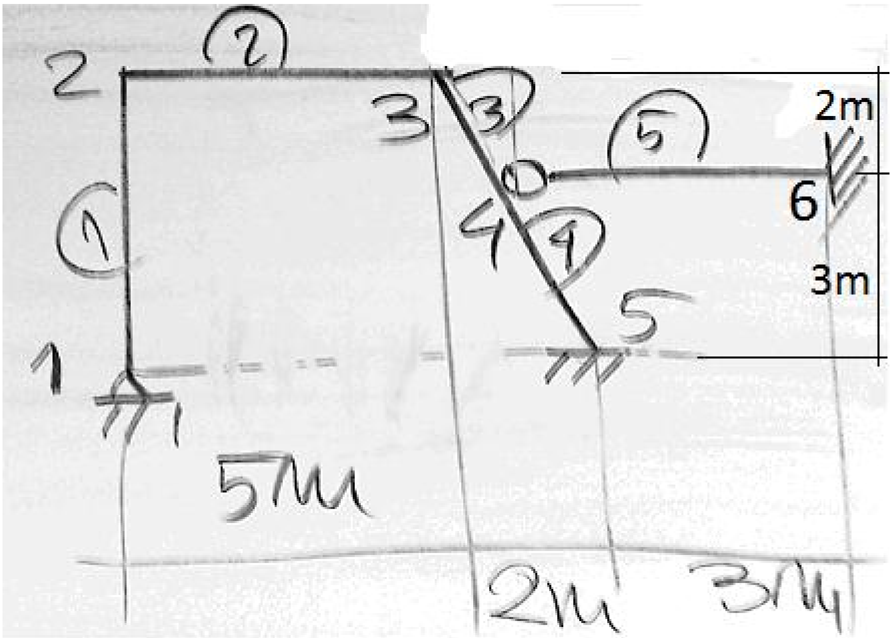
$$\mathrm{Blok\_B10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Blok\_C10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$E := 20\mathrm{GPa}$ $\qquad b := 10\mathrm{cm}$ $\qquad h := 18\mathrm{cm}$

$J := \dfrac{b \cdot h^3}{12}$ $\qquad A := b \cdot h$ $\qquad EA := E \cdot A$ $\qquad EJ := E \cdot J$

$EA = 360 \cdot \mathrm{MN}$ $\qquad EJ = 972 \cdot \mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}^2$



Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$
K = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
A^1 & C^1 & & & & \\
 & B^1+A^2 & C^2 & & & \\
 & & B^2+A^3 & C^3 & & \\
 & & & B^3+A^4+A^5 & C^4 & C^5 \\
 & \text{symetria} & & & B^4 & \\
 & & & & & B^5
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 0m \qquad Ly := 5m \qquad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 5.000000\,m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 93.312 & 233.280 \\ 0.000 & 233.280 & 777.600 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 93.312 & -233.280 \\ 0.000 & -233.280 & 777.600 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -93.312 & 233.280 \\ 0.000 & -233.280 & 388.800 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & -1.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A1 := R^{T} \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 93.312 & 0.000 & 233.280 \\ 0.000 & 72000.000 & 0.000 \\ 233.280 & 0.000 & 777.600 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B1 := R^{T} \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 93.312 & 0.000 & -233.280 \\ 0.000 & 72000.000 & 0.000 \\ -233.280 & 0.000 & 777.600 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C1 := R^{T} \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -93.312 & 0.000 & 233.280 \\ 0.000 & -72000.000 & 0.000 \\ -233.280 & 0.000 & 388.800 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 5m \quad Ly := 0m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 5\,m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 93.312 & 233.280 \\ 0.000 & 233.280 & 777.600 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 93.312 & -233.280 \\ 0.000 & -233.280 & 777.600 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -93.312 & 233.280 \\ 0.000 & -233.280 & 388.800 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$

macierz obrotu

$$A2 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 93.312 & 233.280 \\ 0.000 & 233.280 & 777.600 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B2 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 93.312 & -233.280 \\ 0.000 & -233.280 & 777.600 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C2 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -93.312 & 233.280 \\ 0.000 & -233.280 & 388.800 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 0.8m \quad Ly := -2m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 2.154066\,m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 167125.804 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1166.999 & 1256.897 \\ 0.000 & 1256.897 & 1804.959 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 167125.804 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1166.999 & -1256.897 \\ 0.000 & -1256.897 & 1804.959 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -167125.804 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1166.999 & 1256.897 \\ 0.000 & -1256.897 & 902.479 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$c := \frac{Lx}{L}$ $\qquad$ $s := \frac{Ly}{L}$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.371391 & 0.928477 & 0.000000 \\ -0.928477 & 0.371391 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A3 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 24057.869 & 57227.174 & -1166.999 \\ 57227.174 & 144234.935 & 466.800 \\ -1166.999 & 466.800 & 1804.959 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B3 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 24057.869 & 57227.174 & 1166.999 \\ 57227.174 & 144234.935 & -466.800 \\ 1166.999 & -466.800 & 1804.959 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C3 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -24057.869 & -57227.174 & -1166.999 \\ -57227.174 & -144234.935 & 466.800 \\ 1166.999 & -466.800 & 902.479 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "4" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 1.2m \quad Ly := -3m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 3.231099\,m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 111417.203 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 345.778 & 558.621 \\ 0.000 & 558.621 & 1203.306 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 111417.203 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 345.778 & -558.621 \\ 0.000 & -558.621 & 1203.306 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -111417.203 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -345.778 & 558.621 \\ 0.000 & -558.621 & 601.653 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "4" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.371391 & 0.928477 & 0.000000 \\ -0.928477 & 0.371391 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A4 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 15665.974 & 38300.492 & -518.666 \\ 38300.492 & 96097.006 & 207.467 \\ -518.666 & 207.467 & 1203.306 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B4 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 15665.974 & 38300.492 & 518.666 \\ 38300.492 & 96097.006 & -207.467 \\ 518.666 & -207.467 & 1203.306 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C4 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -15665.974 & -38300.492 & -518.666 \\ -38300.492 & -96097.006 & 207.467 \\ 518.666 & -207.467 & 601.653 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "5" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 4.2m \quad Ly := 0m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 4.2m$

$A := Blok\_A01(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 85714.286 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 39.359 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B01(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 85714.286 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 39.359 & -165.306 \\ 0.000 & -165.306 & 694.286 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C01(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -85714.286 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -39.359 & 165.306 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "5" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A5 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 85714.286 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 39.359 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B5 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 85714.286 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 39.359 & -165.306 \\ 0.000 & -165.306 & 694.286 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C5 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -85714.286 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -39.359 & 165.306 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$$