

# Macierze sztywności elementów ram płaskich - Grupa 1

ORIGIN := 1

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

$$\text{Blok\_A11} (EA, EJ, L, 1) := \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}$$

Blok\_B11 ( EA, EJ , L , 1) :=

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow -6a$$

$$A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1$$

A

Blok\_C11 ( EA, EJ , L , 1) :=

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow 6a$$

$$A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1$$

A

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\text{Blok\_A01}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} \text{Blok\_B01 (EA, EJ, L, 1) :=} \\ L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Blok\_C01 (EA, EJ, L, 1) :=} \\ L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array}$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Blok\_B10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$\text{Blok\_A10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok\_C10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

$$E := 20 \text{ GPa}$$

$$b := 10 \text{ cm}$$

$$h := 18 \text{ cm}$$

$$J := \frac{b \cdot h^3}{12}$$

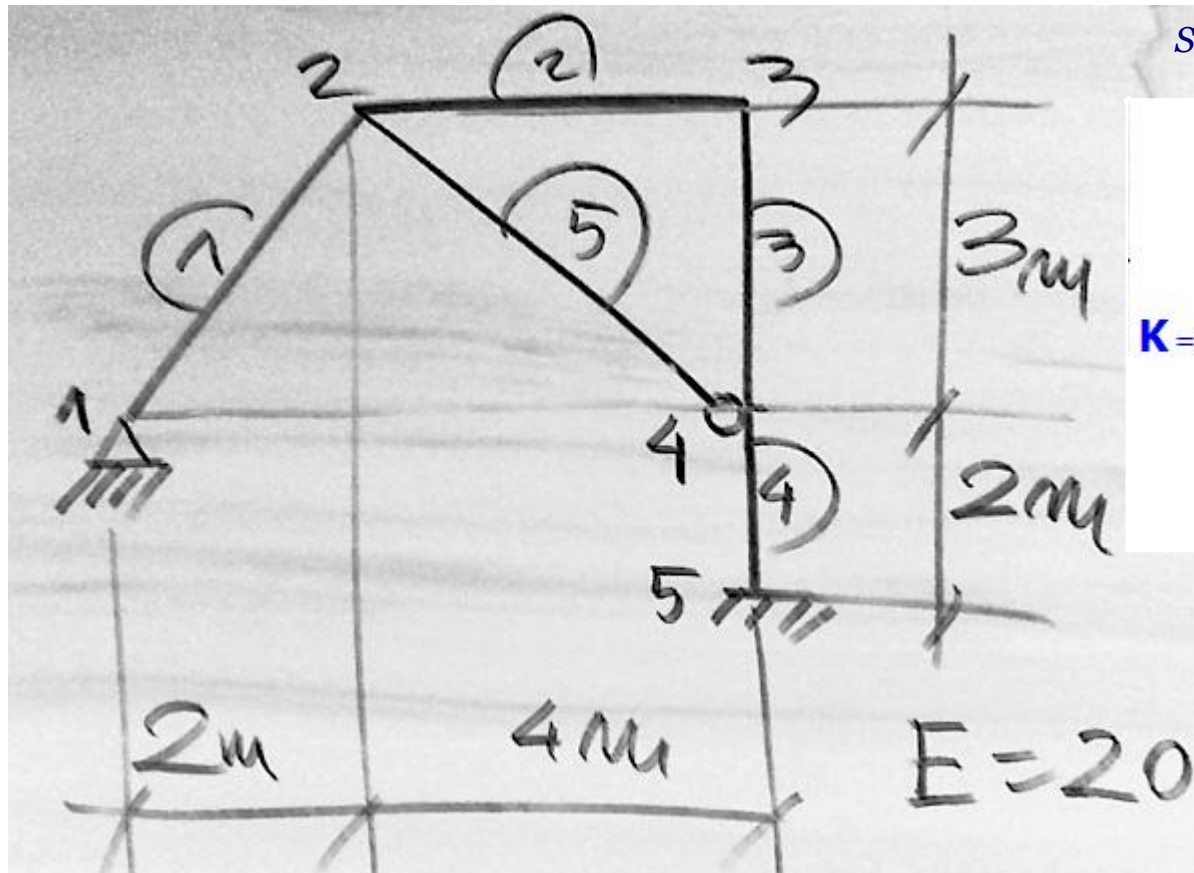
$$A := b \cdot h$$

$$EA := E \cdot A$$

$$EJ := E \cdot J$$

$$EA = 360 \cdot \text{MN}$$

$$EJ = 972 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^2$$



Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} A^1 \\ C^1 \end{matrix} & \begin{matrix} C^1 \\ B^1 + A^2 + A^5 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ C^2 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ C^5 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} B^2 + A^3 \\ C^3 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \\ \text{symetria} & \begin{matrix} B^3 + B^5 + A^4 \\ C^4 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} B^4 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

*Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych*

$$L_x := 2\text{m} \quad L_y := 3\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(L_x)^2 + (L_y)^2} = 3.605551\text{m}$$

$$\underline{A} := \text{Blok\_A11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 99846.035 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 248.847 & 448.615 \\ 0.000 & 448.615 & 1078.337 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok\_B11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 99846.035 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 248.847 & -448.615 \\ 0.000 & -448.615 & 1078.337 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$\underline{C} := \text{Blok\_C11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -99846.035 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -248.847 & 448.615 \\ 0.000 & -448.615 & 539.169 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$\underline{\underline{R}} := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.554700 & -0.832050 & 0.000000 \\ 0.832050 & 0.554700 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A1 := \underline{\underline{R}}^T \cdot A \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 30894.136 & -45967.933 & 373.271 \\ -45967.933 & 69200.747 & 248.847 \\ 373.271 & 248.847 & 1078.337 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B1 := \underline{\underline{R}}^T \cdot B \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 30894.136 & -45967.933 & -373.271 \\ -45967.933 & 69200.747 & -248.847 \\ -373.271 & -248.847 & 1078.337 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C1 := \underline{\underline{R}}^T \cdot C \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} -30894.136 & 45967.933 & 373.271 \\ 45967.933 & -69200.747 & 248.847 \\ -373.271 & -248.847 & 539.169 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$



*Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych*

$$\underline{L_x} := 4\text{m} \quad \underline{L_y} := 0\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 4\text{m}$$

$$A := \text{Blok\_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 90000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 182.250 & 364.500 \\ 0.000 & 364.500 & 972.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok\_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 90000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 182.250 & -364.500 \\ 0.000 & -364.500 & 972.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok\_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -90000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -182.250 & 364.500 \\ 0.000 & -364.500 & 486.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

*Element "2" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych*

$$\underline{\underline{c}} := \frac{Lx}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A2 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 90000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 182.250 & 364.500 \\ 0.000 & 364.500 & 972.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B2 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 90000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 182.250 & -364.500 \\ 0.000 & -364.500 & 972.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C2 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -90000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -182.250 & 364.500 \\ 0.000 & -364.500 & 486.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

*Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych*

$$\underline{L_x} := 0\text{m} \quad \underline{L_y} := -3\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 3\text{m}$$

$$A := \text{Blok\_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 120000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 432.000 & 648.000 \\ 0.000 & 648.000 & 1296.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok\_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 120000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 432.000 & -648.000 \\ 0.000 & -648.000 & 1296.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok\_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -120000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -432.000 & 648.000 \\ 0.000 & -648.000 & 648.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ -1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A3 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 432.000 & 0.000 & -648.000 \\ 0.000 & 120000.000 & 0.000 \\ -648.000 & 0.000 & 1296.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B3 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 432.000 & 0.000 & 648.000 \\ 0.000 & 120000.000 & 0.000 \\ 648.000 & 0.000 & 1296.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C3 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -432.000 & 0.000 & -648.000 \\ 0.000 & -120000.000 & 0.000 \\ 648.000 & 0.000 & 648.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

*Element "4" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych*

$$\underline{L_x} := 0\text{m} \quad \underline{L_y} := -2\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 2\text{m}$$

$$A := \text{Blok\_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 180000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1458.000 & 1458.000 \\ 0.000 & 1458.000 & 1944.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok\_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 180000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1458.000 & -1458.000 \\ 0.000 & -1458.000 & 1944.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok\_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -180000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1458.000 & 1458.000 \\ 0.000 & -1458.000 & 972.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

*Element "4" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych*

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ -1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A4 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 1458.000 & 0.000 & -1458.000 \\ 0.000 & 180000.000 & 0.000 \\ -1458.000 & 0.000 & 1944.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B4 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 1458.000 & 0.000 & 1458.000 \\ 0.000 & 180000.000 & 0.000 \\ 1458.000 & 0.000 & 1944.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C4 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -1458.000 & 0.000 & -1458.000 \\ 0.000 & -180000.000 & 0.000 \\ 1458.000 & 0.000 & 972.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

*Element "5" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych*

$$\underline{L_x} := 4\text{m} \quad \underline{L_y} := -3\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 5\text{m}$$

$$A := \text{Blok\_A10}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 23.328 & 116.640 \\ 0.000 & 116.640 & 583.200 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok\_B10}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 23.328 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok\_C10}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -23.328 & 0.000 \\ 0.000 & -116.640 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "5" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.800000 & 0.600000 & 0.000000 \\ -0.600000 & 0.800000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A5 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 46088.398 & 34548.803 & -69.984 \\ 34548.803 & 25934.930 & 93.312 \\ -69.984 & 93.312 & 583.200 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B5 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 46088.398 & 34548.803 & 0.000 \\ 34548.803 & 25934.930 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C5 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -46088.398 & -34548.803 & 0.000 \\ -34548.803 & -25934.930 & 0.000 \\ 69.984 & -93.312 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$