Statyka kratownicy stalowej o 3 różnych przekrojach prętów obciążonej temperaturą

$ORIGIN := 1$ *- Ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

$E := 210GPa$ *- Moduł Younga stali*

$\alpha_t := 1.2 \cdot 10^{-5}$ *- Współczynnik rozszerzalności cieplnej stali*

$D1 := 70mm$ $g1 := 4mm$

$D2 := 60mm$ $g2 := 4mm$

$D3 := 50mm$ $g3 := 3mm$

$A1 := \pi \cdot g1 \cdot (D1 - g1) = 8.294\,cm^2$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 1...3*

$A2 := \pi \cdot g2 \cdot (D2 - g2) = 7.037\,cm^2$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 4...6*

$A3 := \pi \cdot g3 \cdot (D3 - g3) = 4.430\,cm^2$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 7...9*

Parametry pomocnicze:

$Lss := 2$ *- Liczba stopni swobody węzła*

$Le := 9$ *- Liczba elementów*

$Lw := 6$ *- Liczba węzłów*

$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań*

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

$pTo_{Lr} := 0$ *Deklaracja globalnego wektora obciążeń termicznych i wypełnienie go zerami*

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

$$\mathrm{LBM}(A, B, w, k) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0 .. \operatorname{rows}(B) - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0 .. \operatorname{cols}(B) - 1 \\ \quad\quad A_{w+i\,,\,k+j} \leftarrow B_{1+i\,,\,1+j} \\ A \end{array} \right.$$

Współrzędne węzłów kratownicy

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} m \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} m$$

Numery węzłów początkowych (Wp)
i końcowych (Wk) elementów

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Przyrost temperatury elementów

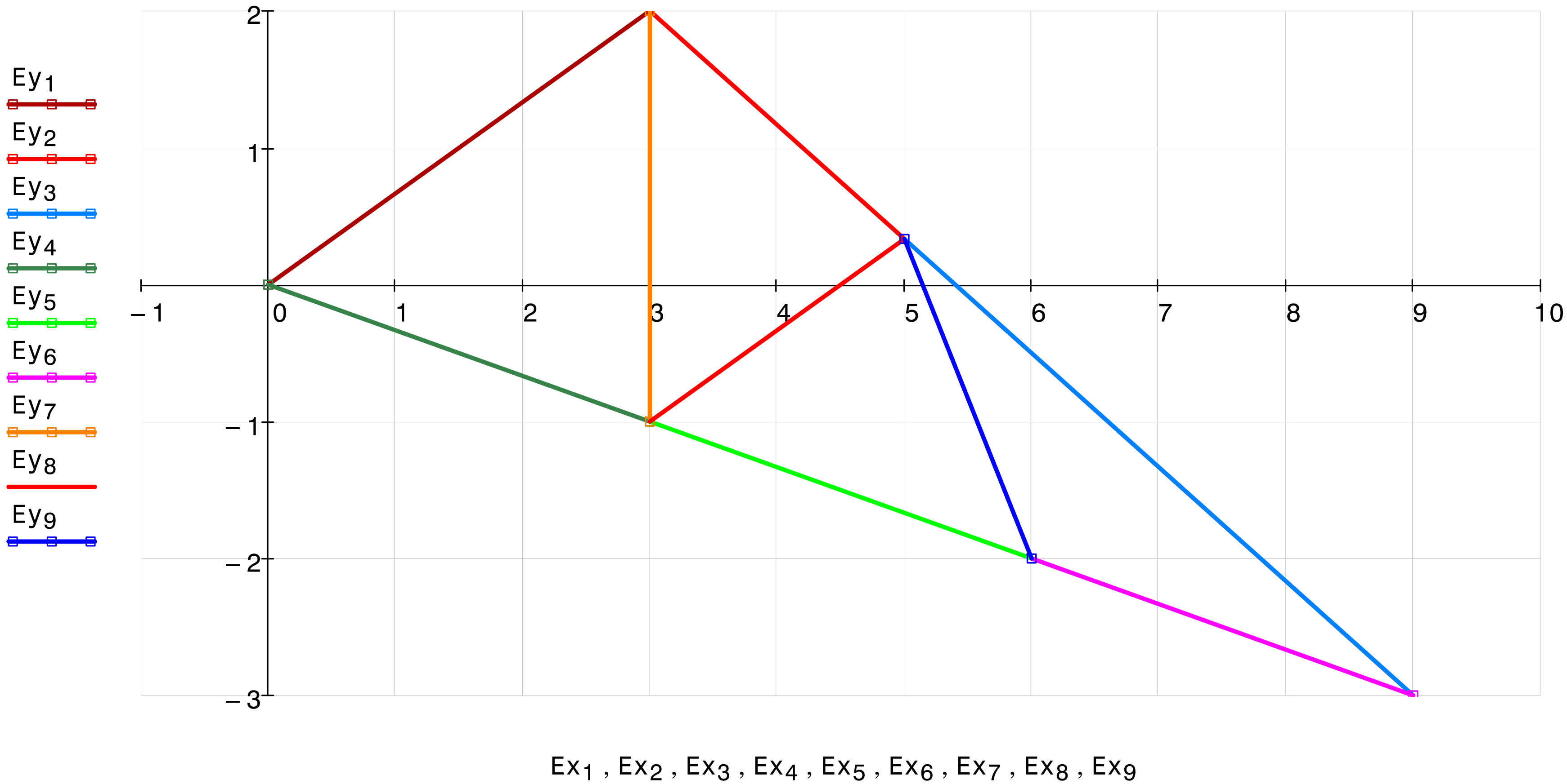
$$T := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \end{pmatrix}$$

Przekroje elementów

$e := 1 .. Le$ *Pętla po wszystkich elementach kratownicy*

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix}$ $Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix}$ *Ex, Ey - współrzędne węzłów elementów kratownicy*



Macierze sztywności elementów kratownicy

$$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)} \qquad Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)} \qquad L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$$

$Lx =$ (m)

	1
1	3.000
2	2.000
3	4.000
4	3.000
5	3.000
6	3.000
7	0.000
8	2.000
9	1.000

$Ly =$ (m)

	1
1	2.000
2	-1.667
3	-3.333
4	-1.000
5	-1.000
6	-1.000
7	3.000
8	1.333
9	-2.333

$L =$ (m)

	1
1	3.606
2	2.603
3	5.207
4	3.162
5	3.162
6	3.162
7	3.000
8	2.404
9	2.539

$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^3} \cdot \begin{bmatrix} (Lx_e)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & (Ly_e)^2 \end{bmatrix}$$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalczych obliczeniach, można pokazać bloki **J** *macierzy sztywności wszystkich elementów*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 33442.6 & 22295.1 \\ 22295.1 & 14863.4 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 39482.3 & -32901.9 \\ -32901.9 & 27418.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 19741.1 & -16450.9 \\ -16450.9 & 13709.1 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 42059.1 & -14019.7 \\ -14019.7 & 4673.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_5 = \begin{pmatrix} 42059.1 & -14019.7 \\ -14019.7 & 4673.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_6 = \begin{pmatrix} 42059.1 & -14019.7 \\ -14019.7 & 4673.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 31007.5 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_8 = \begin{pmatrix} 26792.1 & 17861.4 \\ 17861.4 & 11907.6 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_9 = \begin{pmatrix} 5686.0 & -13267.4 \\ -13267.4 & 30957.3 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1$ $\qquad$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ $\qquad$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$K := \sum_e \left(LBM\left(K_o, J_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(K_o, J_e, k_e, k_e\right) - LBM\left(K_o, J_e, n_e, k_e\right) - LBM\left(K_o, J_e, k_e, n_e\right) \right)$$

K =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	75501.7	8275.4	-33442.6	-22295.1	-42059.1	14019.7	0.0	0.0	0.0	0.0
2	8275.4	19536.6	-22295.1	-14863.4	14019.7	-4673.2	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-33442.6	-22295.1	72924.9	-10606.8	0.0	0.0	-39482.3	32901.9	0.0	0.0
4	-22295.1	-14863.4	-10606.8	73289.2	0.0	-31007.5	32901.9	-27418.2	0.0	0.0
5	-42059.1	14019.7	0.0	0.0	110910.3	-10178.0	-26792.1	-17861.4	-42059.1	14019.7
6	14019.7	-4673.2	0.0	-31007.5	-10178.0	52261.6	-17861.4	-11907.6	14019.7	-4673.2
7	0.0	0.0	-39482.3	32901.9	-26792.1	-17861.4	91701.6	-44758.9	-5686.0	13267.4
8	0.0	0.0	32901.9	-27418.2	-17861.4	-11907.6	-44758.9	83992.3	13267.4	-30957.3
9	0.0	0.0	0.0	0.0	-42059.1	14019.7	-5686.0	13267.4	89804.2	-41306.8
10	0.0	0.0	0.0	0.0	14019.7	-4673.2	13267.4	-30957.3	-41306.8	...

$\cdot \dfrac{kN}{m}$

Globalna macierz sztywności ***K*** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$

$$\left| K \cdot \frac{1m}{kN} \right| = -1.667 \times 10^{8}$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Globalny wektor sił węzłowych

$$p := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5kN \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7kN \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- siły węzłowe wywołane temperaturą w elemencie "e"

$$t_e := \alpha_t \cdot T_e \cdot \frac{E \cdot A_e}{L_e} \begin{pmatrix} Lx_e \\ Ly_e \end{pmatrix}$$

Agregacja wektora obciążeń termicznych **p**T *(metodą podobną do stosowanej w agregacji macierzy sztywności)*

$$pT := \sum_e \left(LBM\left(pT_O, t_e, n_e, 1\right) - LBM\left(pT_O, t_e, k_e, 1\right)\right)$$

$pT^T =$ (in kN)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.000	0.000	0.000	0.000	27.864	18.576	-14.672	-49.356	-13.192	...

$\cdot kN$

*Kopiowanie Macierzy **K** i wektora **p** przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$K_o := K \qquad p_o := p - pT$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$ *- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach*

$i := 1 .. Lr \qquad j := 1 .. rows(s)$

$K_{o_{s_j, i}} := 0$ *zerowanie wierszy*

$K_{o_{i, s_j}} := 0$ *zerowanie kolumn*

$K_{o_{s_j, s_j}} := 1 \frac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$p_{o_{(s_j)}} := 0$ *zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"*

$K_o =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	72924.9	-10606.8	0.0	0.0	-39482.3	32901.9	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	-10606.8	73289.2	0.0	-31007.5	32901.9	-27418.2	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	110910.3	-10178.0	-26792.1	-17861.4	-42059.1	14019.7	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	-31007.5	-10178.0	52261.6	-17861.4	-11907.6	14019.7	-4673.2	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-39482.3	32901.9	-26792.1	-17861.4	91701.6	-44758.9	-5686.0	13267.4	-19741.1	0.0
8	0.0	0.0	32901.9	-27418.2	-17861.4	-11907.6	-44758.9	83992.3	13267.4	-30957.3	16450.9	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	-42059.1	14019.7	-5686.0	13267.4	89804.2	-41306.8	-42059.1	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	14019.7	-4673.2	13267.4	-30957.3	-41306.8	40303.8	14019.7	0.0
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-19741.1	16450.9	-42059.1	14019.7	61800.2	0.0
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

$\cdot \dfrac{kN}{m}$

$$\left| K_o \cdot 1 \frac{m}{kN} \right| = 1.855 \times 10^{41}$$

- wyznacznik macierzy $\mathbf{K_o}$ *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K_o}| > 0$

$p_o^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.000	0.000	5.000	0.000	-27.864	-18.576	14.672	42.356	13.192	-30.780	0.000	0.000

$\cdot kN$

Rozwiązanie układu równań:

$$u := \mathrm{lsolve}\left(K_o, p_o\right)$$

u - wektor przemieszczeń węzłowych

$u^T =$

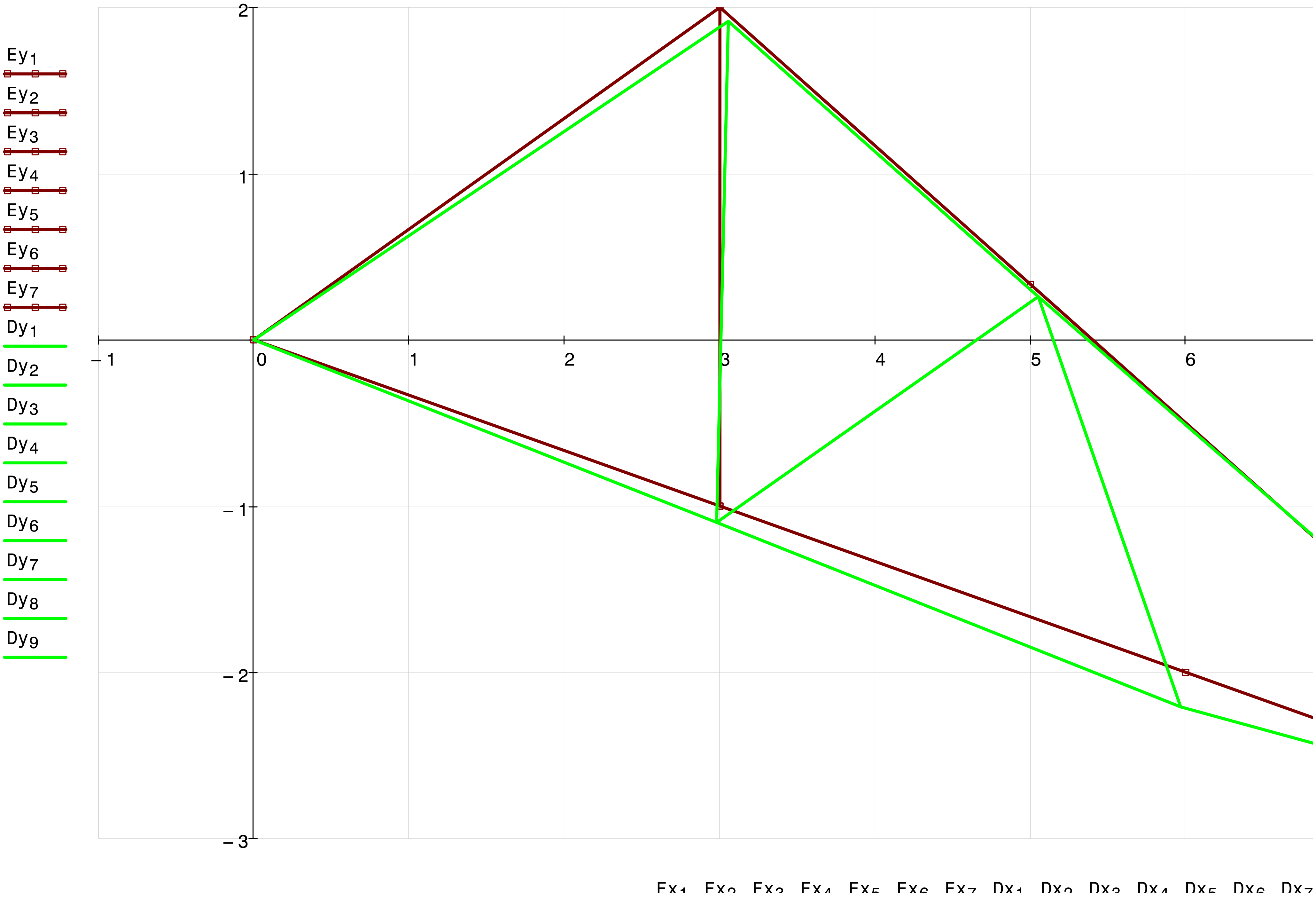
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.0000	0.0000	0.5473	-0.8360	-0.2020	-0.9865	0.4963	-0.7351	-0.3299	-2.0835	0.6023	0.0000

$\cdot\,\mathrm{mm}$

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

$$\mathrm{skala} := 100$$

$$Dx_e := Ex_e + \mathrm{skala}\cdot\begin{bmatrix} u_{\left(2\cdot Wp_e-1\right)} \\ u_{\left(2\cdot Wk_e-1\right)} \end{bmatrix} \qquad Dy_e := Ey_e + \mathrm{skala}\cdot\begin{bmatrix} u_{\left(2\cdot Wp_e\right)} \\ u_{\left(2\cdot Wk_e\right)} \end{bmatrix}$$



Ey1
Ey2
Ey3
Ey4
Ey5
Ey6
Ey7
Dy1
Dy2
Dy3
Dy4
Dy5
Dy6
Dy7
Dy8
Dy9
2
1
−1
−2
−3
−1
0
1
2
3
4
5
6

$Lx_1, Lx_2, Lx_3, Lx_4, Lx_5, Lx_6, Lx_7, Dx_1, Dx_2, Dx_3, Dx_4, Dx_5, Dx_6, Dx_7$

Obliczenie reakcji podpór

$$r := K \cdot u - p + pT$$

$r^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-5.000	2.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	5.000		

$\cdot kN$

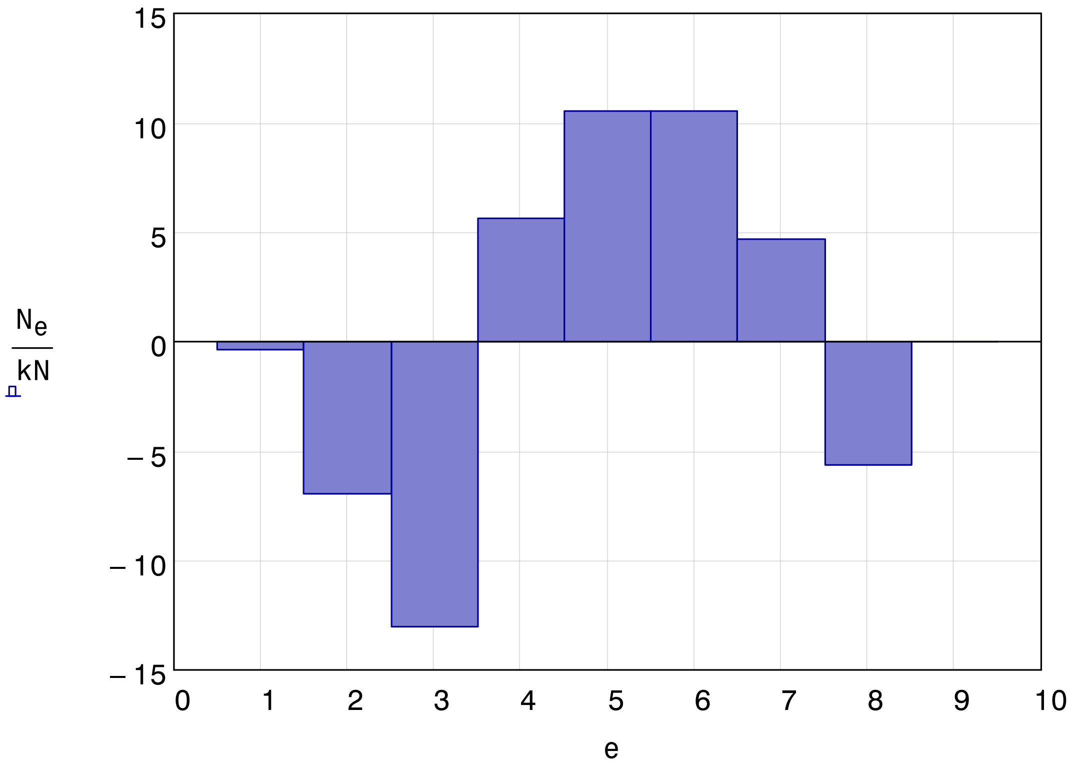
Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}\right) \cdot Ly_e\right] - \alpha_t \cdot T_e \cdot E \cdot A_e$$

$N =$

	1
1	-0.401
2	-6.942
3	-13.017
4	5.622
5	10.541
6	10.541
7	4.667
8	...

$\cdot kN$



Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{E}{(L_e)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1} \right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e} \right) \cdot Ly_e \right] - \alpha_t \cdot T_e \cdot E$$

$\sigma =$

	1
1	-0.483
2	-8.371
3	-15.695
4	7.989
5	14.979
6	14.979
7	10.535
8	-12.662
9	0.000

$\cdot \mathrm{MPa}$