Statyka kratownicy drewnianej o 2 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłami i wzrostem wilgotności (lub temperaturą)

$ORIGIN := 1$ *- ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

$E := 10GPa$ *- moduł Younga drewna*

$\alpha t := 2 \cdot 10^{-5}$ *- współczynnik rozszerzalności (wilgotnościowej)*

$b1 := 7cm$ $h1 := 10cm$ $\rho := 700 \frac{kg}{m^3}$

$b2 := 7cm$ $h2 := 7cm$

$A1 := b1 \cdot h1$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 1...6* $A1 = 70.000 \cdot cm^2$

$A2 := b2 \cdot h2$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 8...19* $A2 = 49.000 \cdot cm^2$

Parametry pomocnicze:

$Lss := 2$ *- Liczba stopni swobody węzła*

$Le := 9$ *- Liczba elementów*

$Lw := 6$ *- Liczba węzłów*

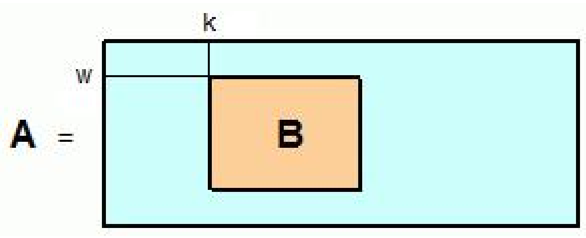
$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań*

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

LBM (A, B, w, k)
ZNACZENIE PARAMETRÓW:
A - nazwa macierzy
B - nazwa bloku
w - numer wiersza, od którego zostanie wprowadzony blok
k - numer kolumny, od której zostanie wprowadzony blok

UWAGA: Macierz B zostanie ulokowana w większej macierzy A, poczynając od elementu usytuowanego w wierszu o numerze "w" i kolumnie o numerze "k".



```
$LBM(A, B, w, k) :=$
    for $i \in 0 .. rows(B) - 1$
        for $j \in 0 .. cols(B) - 1$
            $A_{w+i, k+j} \leftarrow B_{1+i, 1+j}$
    $A$
```

Współrzędne węzłów kratownicy

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} m \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -0.25 \\ 0.5 \\ \frac{-5}{8} \\ -1 \end{pmatrix} m$$

Numery węzłów początkowych (Wp)
i końcowych (Wk) elementów

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Przekroje elementów

$$A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \end{pmatrix}$$

Przyrosty wilgotności
(temperatury) w elementach

$$T := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

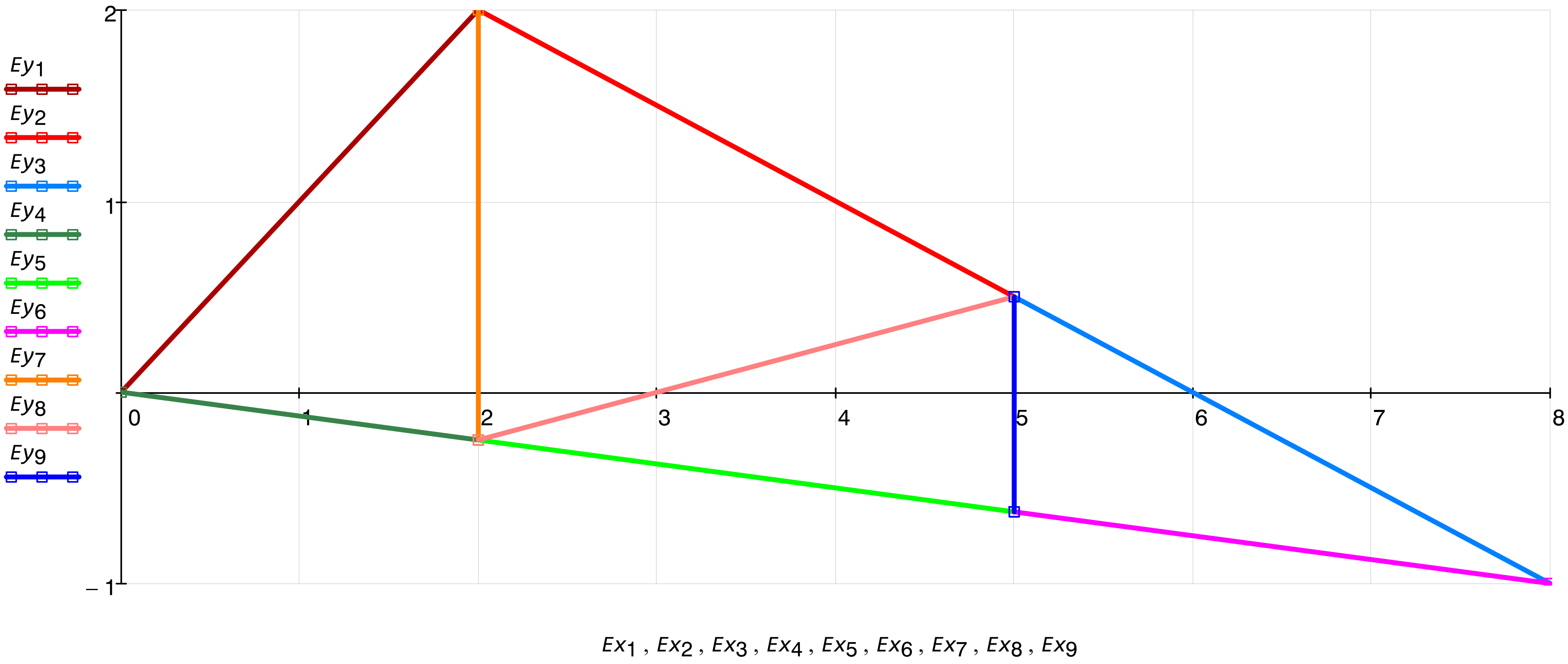
Główna pętla dla wszystkich elementów kratownicy

$$e := 1 .. Le$$

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \qquad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix}$$

Ex, Ey - współrzędne węzłów elementów kratownicy



Ey_1
Ey_2
Ey_3
Ey_4
Ey_5
Ey_6
Ey_7
Ey_8
Ey_9
2
1
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Ex_1 , Ex_2 , Ex_3 , Ex_4 , Ex_5 , Ex_6 , Ex_7 , Ex_8 , Ex_9

Macierze sztywności elementów kratownicy

$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)}$

$Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)}$

$L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$

$Lx =$

	1
1	2.000
2	3.000
3	3.000
4	2.000
5	3.000
6	3.000
7	0.000
8	3.000
9	0.000

m

$Ly =$

	1
1	2.000
2	-1.500
3	-1.500
4	-0.250
5	-0.375
6	-0.375
7	-2.250
8	0.750
9	-1.125

m

$L =$

	1
1	2.828
2	3.354
3	3.354
4	2.016
5	3.023
6	3.023
7	2.250
8	3.092
9	1.125

m

$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^3} \cdot \begin{bmatrix} (Lx_e)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & (Ly_e)^2 \end{bmatrix}$$

Objętość (V) i masa (G) kratownicy

$V := \sum_{e} (A_e \cdot L_e)$

$V = 0.138 \cdot m^3$

$G := \rho \cdot V = 96.566\,kg$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalczych obliczeniach, można pokazać bloki **J** *macierzy sztywności wszystkich elementów*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 12374.4 & 12374.4 \\ 12374.4 & 12374.4 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 16696.0 & -8348.0 \\ -8348.0 & 4174.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 16696.0 & -8348.0 \\ -8348.0 & 4174.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 23936.8 & -2992.1 \\ -2992.1 & 374.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_5 = \begin{pmatrix} 15957.9 & -1994.7 \\ -1994.7 & 249.3 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_6 = \begin{pmatrix} 15957.9 & -1994.7 \\ -1994.7 & 249.3 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 21777.8 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_8 = \begin{pmatrix} 14913.6 & 3728.4 \\ 3728.4 & 932.1 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_9 = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 43555.6 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1$ $\qquad$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ $\qquad$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$K := \sum_{e} \left(LBM\left(Ko, J_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, J_e, k_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, n_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, k_e, n_e\right) \right)$$

$K =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	36311.2	9382.3	-12374.4	-12374.4	-23936.8	2992.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	9382.3	12748.4	-12374.4	-12374.4	2992.1	-374.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-12374.4	-12374.4	29070.3	4026.4	0.0	0.0	-16696.0	8348.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	-12374.4	-12374.4	4026.4	38326.1	0.0	-21777.8	8348.0	-4174.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	-23936.8	2992.1	0.0	0.0	54808.2	-1258.4	-14913.6	-3728.4	-15957.9	1994.7	0.0	0.0
6	2992.1	-374.0	0.0	-21777.8	-1258.4	23333.2	-3728.4	-932.1	1994.7	-249.3	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-16696.0	8348.0	-14913.6	-3728.4	48305.5	-12967.6	0.0	0.0	-16696.0	8348.0
8	0.0	0.0	8348.0	-4174.0	-3728.4	-932.1	-12967.6	52835.6	0.0	-43555.6	8348.0	-4174.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	-15957.9	1994.7	0.0	0.0	31915.7	-3989.5	-15957.9	1994.7
10	0.0	0.0	0.0	0.0	1994.7	-249.3	0.0	-43555.6	-3989.5	44054.2	1994.7	-249.3
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-16696.0	8348.0	-15957.9	1994.7	32653.8	-10342.7
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	8348.0	-4174.0	1994.7	-249.3	-10342.7	4423.3

$\cdot \dfrac{kN}{m}$

Globalna macierz sztywności ***K*** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$

$$\left| K \cdot \frac{1m}{kN} \right| = 0.000 \times 10^{0}$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Globalny wektor sił węzłowych

$p_{Lr} := 0$

$p =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	0.000
5	0.000
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	0.000
10	0.000
11	0.000
12	0.000

$\cdot kN$

Rzutowanie siły w węźle 5 na osie globalnego układu współrzędnych

$Fx2 := 6kN \cdot sin(35deg) = 3.441 \cdot kN$

$Fy2 := -6kN \cdot cos(35deg) = -4.915 \cdot kN$

Siła pozioma w węźle 8

$Fy5 := 3kN$

Wstawianie sił do wektora "prawej strony"

$p_3 := Fx2$ $p_4 := Fy2$ $p_{10} := Fy5$

$p =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	3.441
4	-4.915
5	0.000
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	0.000
10	3.000
11	0.000
12	0.000

$\cdot kN$

- siły węzłowe wywołane temperaturą w elemencie "e"

$$t_e := \alpha t \cdot T_e \cdot \frac{E \cdot A_e}{L_e} \begin{pmatrix} Lx_e \\ Ly_e \end{pmatrix} \qquad pTo_{Lr} := 0$$

Agregacja wektora obciążeń termicznych **p**T *(metodą podobną do stosowanej w agregacji macierzy sztywności)*

$$pT := \sum_e \left(LBM\left(pTo, t_e, n_e, 1\right) - LBM\left(pTo, t_e, k_e, 1\right)\right)$$

$pT =$ (in $\cdot kN$)

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	-49.000
5	19.015
6	53.754
7	-19.015
8	-34.154
9	0.000
10	29.400
11	0.000
12	0.000

$\cdot kN$

Kopiowanie Macierzy **K** *i wektora* **p** *przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$Ko := K$ $\qquad po := p - pT$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$Lwb := 3$ *- liczba warunków brzegowych*

$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$ *- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach*

$i := 1 .. \; Lr$ $\qquad j := 1 .. \; Lwb$

$Ko_{s_j, i} := 0$ *zerowanie wierszy*

$Ko_{i, s_j} := 0$ *zerowanie kolumn - to nie jest konieczne!*

$Ko_{s_j, s_j} := 1 \frac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$po_{(s_j)} := 0$ *zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"*

$Ko =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	29070.3	4026.4	0.0	0.0	-16696.0	8348.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	4026.4	38326.1	0.0	-21777.8	8348.0	-4174.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	54808.2	-1258.4	-14913.6	-3728.4	-15957.9	1994.7	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	-21777.8	-1258.4	23333.2	-3728.4	-932.1	1994.7	-249.3	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-16696.0	8348.0	-14913.6	-3728.4	48305.5	-12967.6	0.0	0.0	-16696.0	0.0
8	0.0	0.0	8348.0	-4174.0	-3728.4	-932.1	-12967.6	52835.6	0.0	-43555.6	8348.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	-15957.9	1994.7	0.0	0.0	31915.7	-3989.5	-15957.9	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	1994.7	-249.3	0.0	-43555.6	-3989.5	44054.2	1994.7	0.0
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-16696.0	8348.0	-15957.9	1994.7	32653.8	0.0
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

$\cdot \frac{kN}{m}$

$\left|Ko \cdot 1 \frac{m}{kN}\right| = 3.764 \times 10^{38}$ *- wyznacznik macierzy* $\mathbf{K}_o$ *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}_o| > 0$

$po^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.000	0.000	3.441	44.085	-19.015	-53.754	19.015	34.154	0.000	-26.400	0.000	0.000

$\cdot kN$

Rozwiązanie układu równań: $u := \mathrm{lsolve}(Ko, po)$

u - wektor przemieszczeń węzłowych

$u^T =$

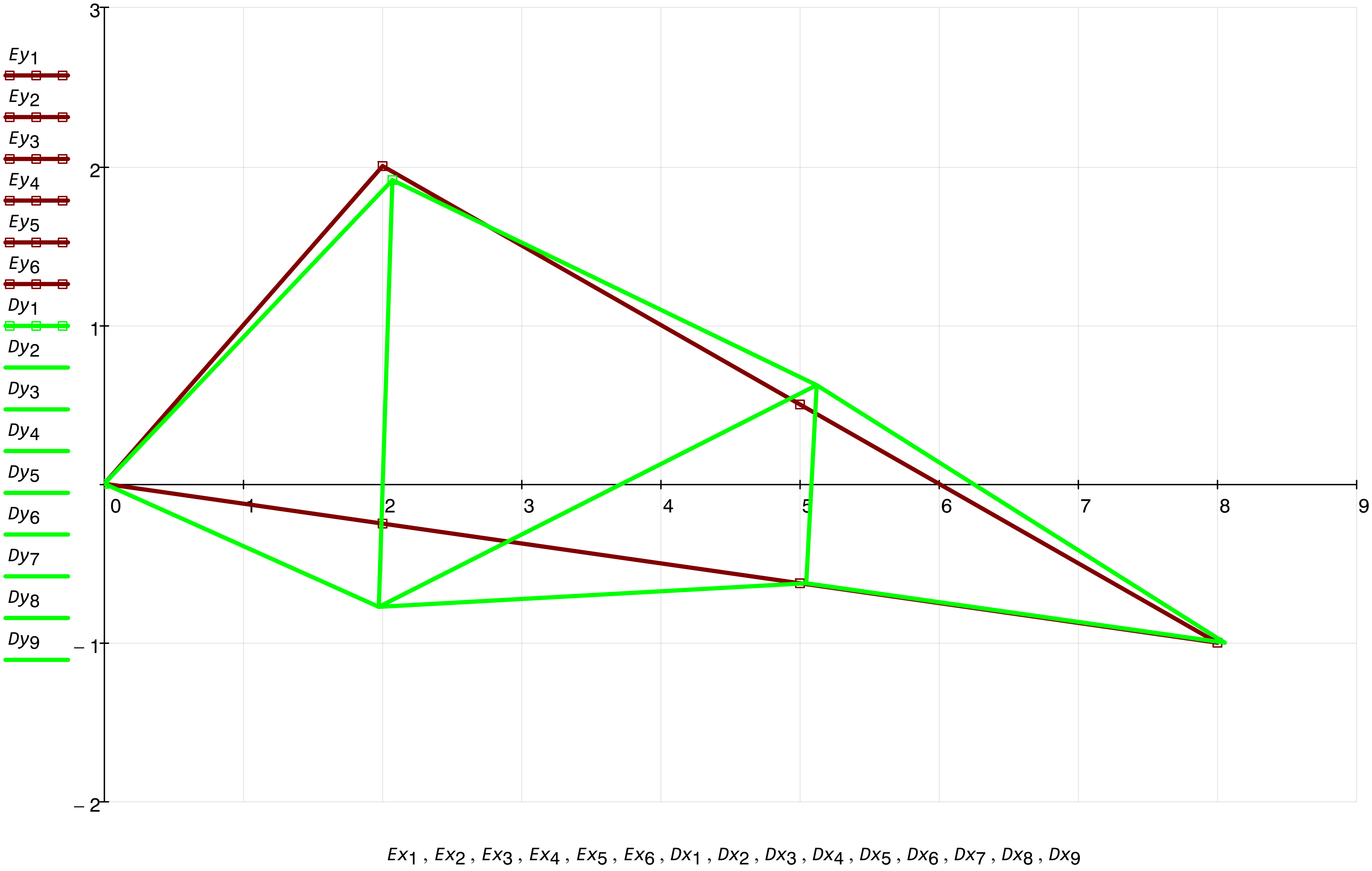
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.0000	0.0000	0.3499	-0.4412	-0.1368	-2.6223	0.5994	0.6055	0.2267	-0.0006	0.2625	0.0000

$\cdot mm$

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

$skala := 200$

$$Dx_e := Ex_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e - 1)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e - 1)} \end{bmatrix} \qquad Dy_e := Ey_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e)} \end{bmatrix}$$


3
2
1
– 1
– 2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Ey_1
Ey_2
Ey_3
Ey_4
Ey_5
Ey_6
Dy_1
Dy_2
Dy_3
Dy_4
Dy_5
Dy_6
Dy_7
Dy_8
Dy_9
Ex_1 , Ex_2 , Ex_3 , Ex_4 , Ex_5 , Ex_6 , Dx_1 , Dx_2 , Dx_3 , Dx_4 , Dx_5 , Dx_6 , Dx_7 , Dx_8 , Dx_9

Obliczenie reakcji podpór

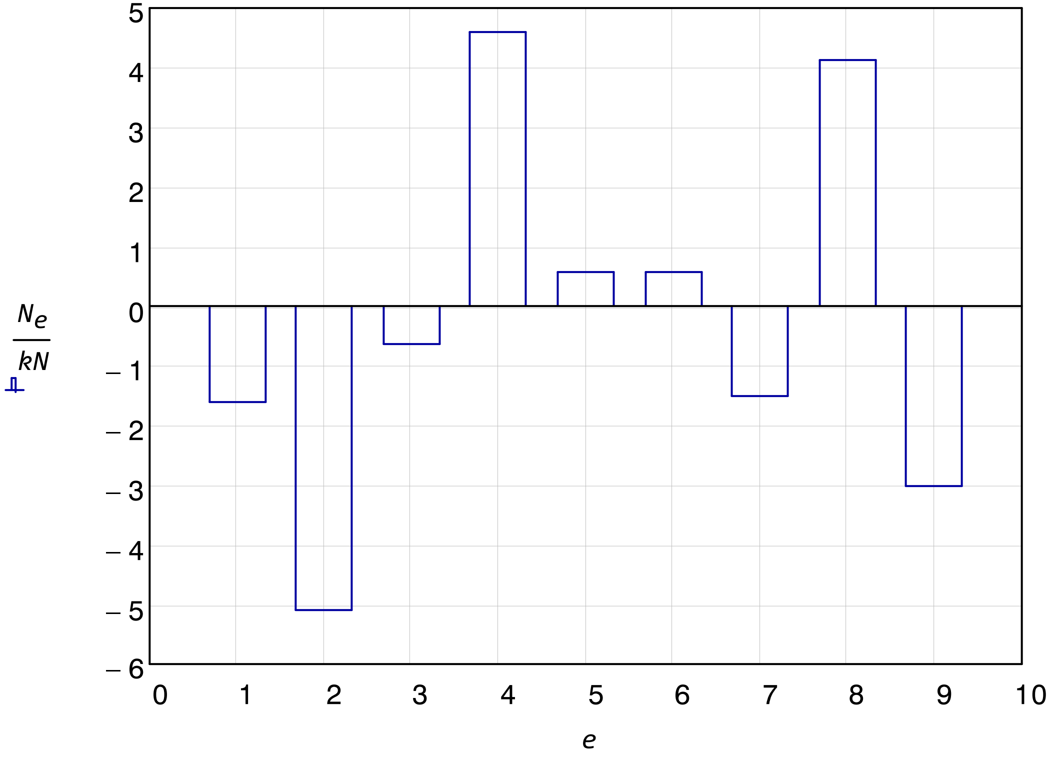
$$r := K \cdot u - p + pT$$

$$r^T = \begin{array}{c|cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 1 & -3.441 & 1.701 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.214 \end{array} \cdot kN$$

Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := E \cdot A_e \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1} \right) \cdot \frac{Lx_e}{\left(L_e\right)^2} + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e} \right) \cdot \frac{Ly_e}{\left(L_e\right)^2} - \alpha t \cdot T_e \right]$$

$$N = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & -1.597 \\ 2 & -5.11 \\ 3 & -0.638 \\ 4 & 4.606 \\ 5 & 0.575 \\ 6 & 0.575 \\ 7 & -1.5 \\ 8 & 4.123 \\ 9 & -3 \end{array} \cdot kN$$



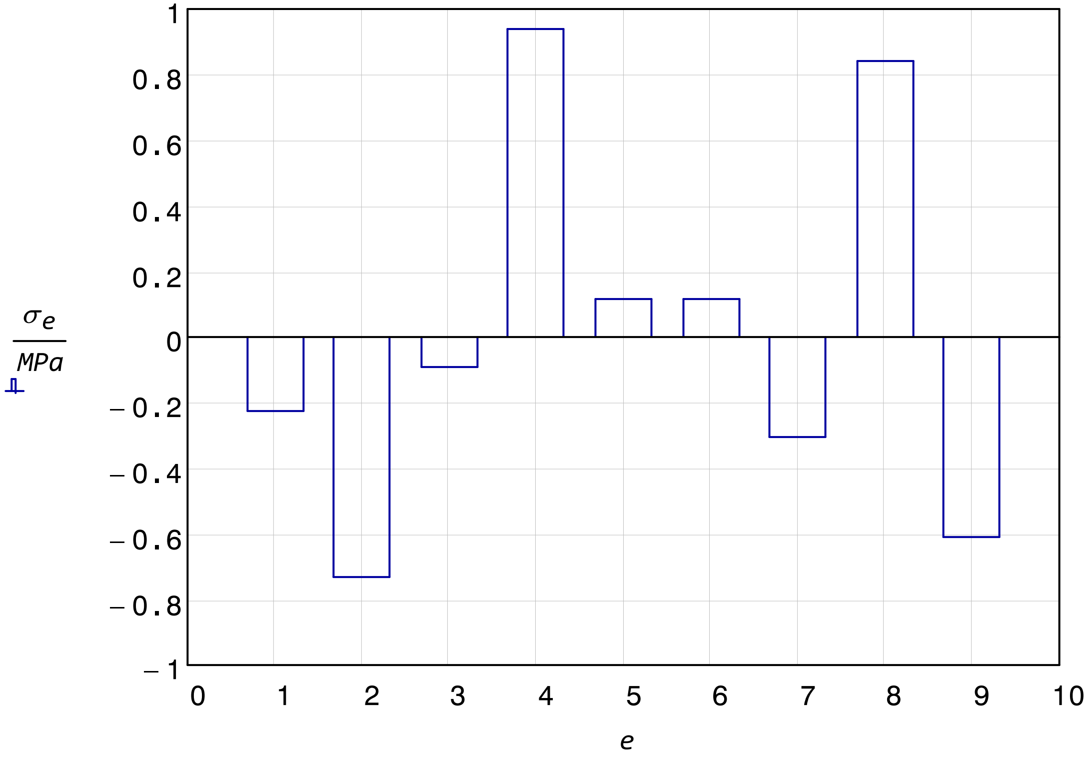
Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{1}{A_e} \cdot N_e$$

$\sigma =$

	1
1	-0.228
2	-0.730
3	-0.091
4	0.940
5	0.117
6	0.117
7	-0.306
8	0.841
9	-0.612

$\cdot MPa$



Wykres wytężeń

$f := 5MPa \qquad W := \frac{1}{f} \cdot \sigma$

$$W = \begin{pmatrix} -0.046 \\ -0.146 \\ -0.018 \\ 0.188 \\ 0.023 \\ 0.023 \\ -0.061 \\ 0.168 \\ -0.122 \end{pmatrix}$$