Statyka kratownicy stalowej o 2 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłami

$ORIGIN := 1$ - ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy

$E := 208GPa$ - moduł Younga stali

$\alpha t := 1.2 \cdot 10^{-5}$ - współczynnik rozszerzalności termicznej stali

$g1 := 4mm$ $g2 := 3mm$ $\rho := 7800 \frac{kg}{m^3}$

$D1 := 70mm$ $D2 := 50mm$

$A1 := \pi \cdot g1 \cdot (D1 - g1)$ - Pole powierzchni przekroju elementów 1...6 $A1 = 8.294 \cdot cm^2$

$A2 := \pi \cdot g2 \cdot (D2 - g2)$ - Pole powierzchni przekroju elementów 8...19 $A2 = 4.430 \cdot cm^2$

Parametry pomocnicze:

$Lss := 2$ - Liczba stopni swobody węzła

$Le := 19$ - Liczba elementów

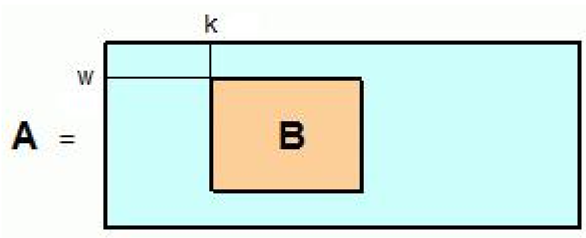
$Lw := 11$ - Liczba węzłów

$Lr := Lss \cdot Lw$ - Liczba równań

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

LBM (A, B, w, k)
ZNACZENIE PARAMETRÓW:
A - nazwa macierzy
B - nazwa bloku
w - numer wiersza, od którego zostanie wprowadzony blok
k - numer kolumny, od której zostanie wprowadzony blok
UWAGA: Macierz B zostanie ulokowana w większej macierzy A, poczynając od elementu usytuowanego w wierszu o numerze "w" i kolumnie o numerze "k".



$$LBM(A,B,w,k) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0 .. rows(B)-1 \\ \quad \text{for } j \in 0 .. cols(B)-1 \\ \quad\quad A_{w+i,\,k+j} \leftarrow B_{1+i,\,1+j} \\ A \end{array} \right.$$

Współrzędne węzłów kratownicy

$$X := \begin{pmatrix} -6 \\ -4.5 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4.5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} m \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ \frac{20}{9} \\ 5 \\ 10 \\ 5 \\ \frac{10}{3} \\ 5 \\ 2.5 \\ \frac{20}{9} \\ 0 \end{pmatrix} m$$

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \\ 11 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 7 \\ 10 \\ 11 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Przekroje elementów

$$A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \end{pmatrix}$$

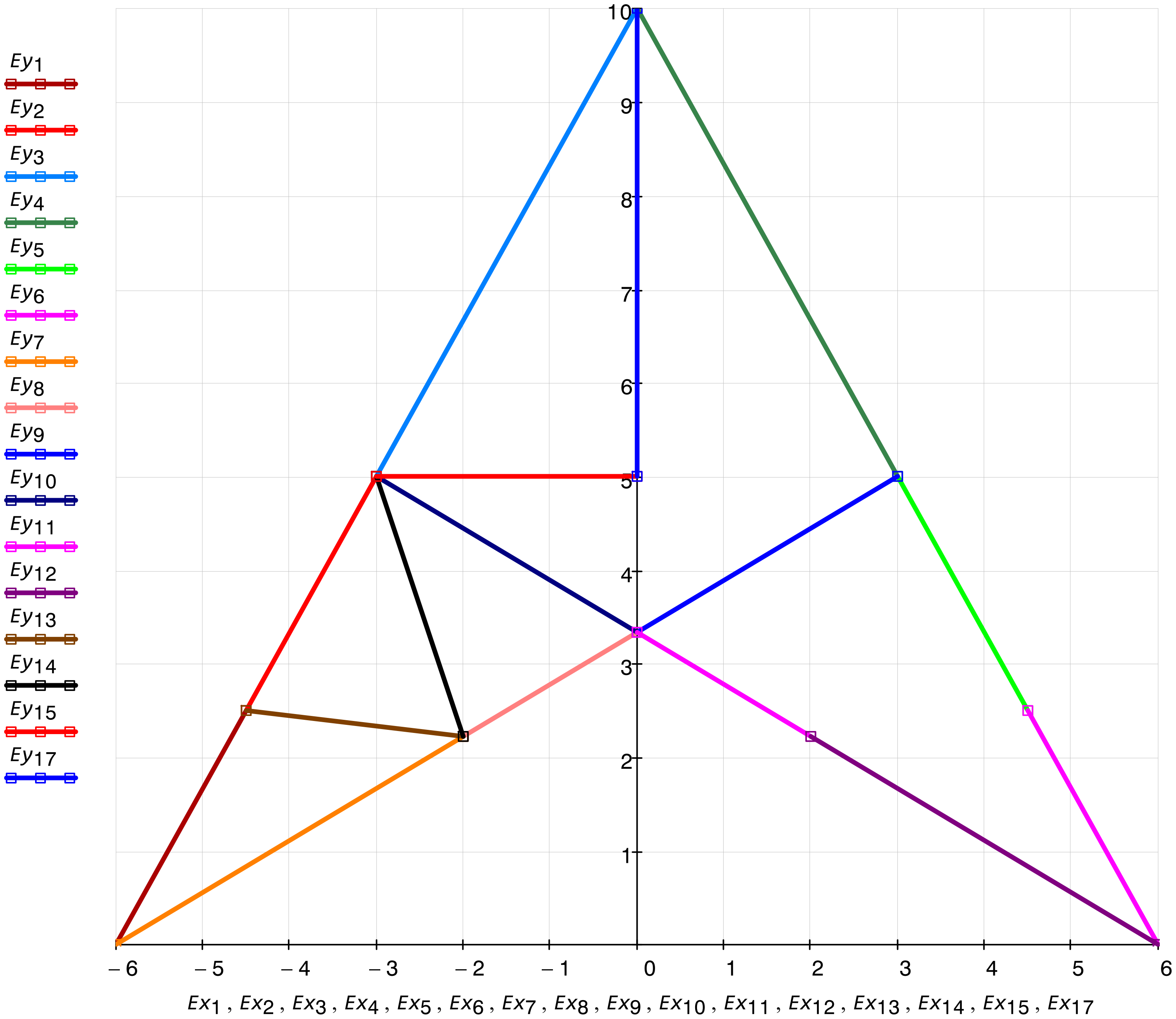
Pętla po wszystkich elementach kratownicy

$e := 1 .. Le$

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \qquad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix}$$

Ex, Ey - współrzędne węzłów elementów kratownicy



Ey_1
Ey_2
Ey_3
Ey_4
Ey_5
Ey_6
Ey_7
Ey_8
Ey_9
Ey_{10}
Ey_{11}
Ey_{12}
Ey_{13}
Ey_{14}
Ey_{15}
Ey_{17}
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
$Ex_1, Ex_2, Ex_3, Ex_4, Ex_5, Ex_6, Ex_7, Ex_8, Ex_9, Ex_{10}, Ex_{11}, Ex_{12}, Ex_{13}, Ex_{14}, Ex_{15}, Ex_{17}$

Macierze sztywności elementów kratownicy

$$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)} \qquad Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)} \qquad L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$$

$Lx =$ (m)

	1
1	1.500
2	1.500
3	3.000
4	3.000
5	1.500
6	1.500
7	4.000
8	2.000
9	3.000
10	3.000
11	2.000
12	4.000
13	2.500
14	-1.000
15	3.000
16	3.000
17	0.000
18	-1.000
19	-2.500

$Ly =$ (m)

	1
1	2.500
2	2.500
3	5.000
4	-5.000
5	-2.500
6	-2.500
7	2.222
8	1.111
9	1.667
10	-1.667
11	-1.111
12	-2.222
13	-0.278
14	2.778
15	0.000
16	0.000
17	-5.000
18	-2.778
19	-0.278

$L =$ (m)

	1
1	2.915
2	2.915
3	5.831
4	5.831
5	2.915
6	2.915
7	4.576
8	2.288
9	3.432
10	3.432
11	2.288
12	4.576
13	2.515
14	2.952
15	3.000
16	3.000
17	5.000
18	2.952
19	2.515

$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^3} \cdot \begin{bmatrix} (Lx_e)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & (Ly_e)^2 \end{bmatrix}$$

Objętość (V) i masa (G) kratownicy

$$V := \sum_e (A_e \cdot L_e) \qquad V = 0.038 \cdot m^3 \qquad G := \rho \cdot V = 297.820\,kg$$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalczych obliczeniach, można pokazać bloki **J** *macierzy sztywności wszystkich elementów*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 15662.9 & 26104.8 \\ 26104.8 & 43508.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 15662.9 & 26104.8 \\ 26104.8 & 43508.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 7831.4 & 13052.4 \\ 13052.4 & 21754.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 7831.4 & -13052.4 \\ -13052.4 & 21754.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_5 = \begin{pmatrix} 15662.9 & -26104.8 \\ -26104.8 & 43508.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_6 = \begin{pmatrix} 15662.9 & -26104.8 \\ -26104.8 & 43508.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{pmatrix} 15386.5 & 8548.1 \\ 8548.1 & 4748.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_8 = \begin{pmatrix} 30773.1 & 17096.2 \\ 17096.2 & 9497.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_9 = \begin{pmatrix} 20515.4 & 11397.4 \\ 11397.4 & 6331.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_{10} = \begin{pmatrix} 20515.4 & -11397.4 \\ -11397.4 & 6331.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_{11} = \begin{pmatrix} 30773.1 & -17096.2 \\ -17096.2 & 9497.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_{12} = \begin{pmatrix} 15386.5 & -8548.1 \\ -8548.1 & 4748.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_{13} = \begin{pmatrix} 36182.5 & -4020.3 \\ -4020.3 & 446.7 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_{14} = \begin{pmatrix} 3580.6 & -9946.0 \\ -9946.0 & 27627.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_{15} = \begin{pmatrix} 30712.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_{16} = \begin{pmatrix} 30712.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_{17} = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 18427.3 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_{18} = \begin{pmatrix} 3580.6 & 9946.0 \\ 9946.0 & 27627.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1$ $\qquad$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ $\quad$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$K := \sum_e \left(LBM\left(Ko, J_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, J_e, k_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, n_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, k_e, n_e\right)\right)$$

$K =$ $\cdot \dfrac{kN}{m}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	31049.4	34652.9	-15662.9	-26104.8	-15386.5	-8548.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	34652.9	48256.9	-26104.8	-43508.0	-8548.1	-4748.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-15662.9	-26104.8	67508.3	48189.3	-36182.5	4020.3	-15662.9	-26104.8	0.0	0.0	0.0	0.0
4	-26104.8	-43508.0	48189.3	87462.6	4020.3	-446.7	-26104.8	-43508.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	-15386.5	-8548.1	-36182.5	4020.3	85922.7	11677.9	-3580.6	9946.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	-8548.1	-4748.9	4020.3	-446.7	11677.9	42321.4	9946.0	-27627.9	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-15662.9	-26104.8	-3580.6	9946.0	78302.5	17813.7	-7831.4	-13052.4	-30712.2	0.0
8	0.0	0.0	-26104.8	-43508.0	9946.0	-27627.9	17813.7	99221.8	-13052.4	-21754.0	0.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-7831.4	-13052.4	15662.9	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-13052.4	-21754.0	0.0	61935.3	0.0	-18427.3
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-30712.2	0.0	0.0	0.0	61424.4	0.0
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-18427.3	0.0	18427.3
13	0.0	0.0	0.0	0.0	-30773.1	-17096.2	-20515.4	11397.4	0.0	0.0	0.0	0.0
14	0.0	0.0	0.0	0.0	-17096.2	-9497.9	11397.4	-6331.9	0.0	0.0	0.0	0.0
15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-7831.4	13052.4	-30712.2	0.0
16	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	13052.4	-21754.0	0.0	...

Globalna macierz sztywności **K** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$

$$\left| K \cdot \frac{1m}{kN} \right| = 8.234 \times 10^{52}$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Globalny wektor sił węzłowych

$p_{Lr} := 0$

Rzutowanie siły w węźle 5 na osie globalnego układu współrzędnych

$Fx5 := -5kN \cdot \sin(50deg) = -3.830 \cdot kN$

$Fy5 := -5kN \cdot \cos(50deg) = -3.214 \cdot kN$

Siła pozioma w węźle 8

$Fx8 := -6kN$

Wstawianie sił do wektora "prawej strony"

$p_9 := Fx5$ $\quad p_{10} := Fy5$ $\quad p_{15} := Fx8$

p = (kN)

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	0.000
5	0.000
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	-3.830
10	-3.214
11	0.000
12	0.000
13	0.000
14	0.000
15	-6.000
16	0.000
17	0.000
18	0.000
19	0.000
20	0.000
21	0.000
22	0.000

*Kopiowanie Macierzy **K** i wektora **p** przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$Ko := K \qquad po := p$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$Lwb := 4$ *- liczba warunków brzegowych*

$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 21 \\ 22 \end{pmatrix}$ *- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach*

$i := 1 .. Lr \qquad j := 1 .. Lwb$

$Ko_{s_j, i} := 0$ *zerowanie wierszy*

$Ko_{i, s_j} := 0$ *zerowanie kolumn - nie jest konieczne!*

$Ko_{s_j, s_j} := 1 \frac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$po_{(s_j)} := 0$ *zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"*

$Ko =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	67508.3	48189.3	-36182.5	4020.3	-15662.9	-26104.8	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	48189.3	87462.6	4020.3	-446.7	-26104.8	-43508.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	-36182.5	4020.3	85922.7	11677.9	-3580.6	9946.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	4020.3	-446.7	11677.9	42321.4	9946.0	-27627.9	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-15662.9	-26104.8	-3580.6	9946.0	78302.5	17813.7	-7831.4	-13052.4	-30712.2
8	0.0	0.0	-26104.8	-43508.0	9946.0	-27627.9	17813.7	99221.8	-13052.4	-21754.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-7831.4	-13052.4	15662.9	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-13052.4	-21754.0	0.0	61935.3	0.0
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-30712.2	0.0	0.0	0.0	61424.4
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-18427.3	...

$\cdot \frac{kN}{m}$

$\left| Ko \cdot 1 \frac{m}{kN} \right| = 1.029 \times 10^{82}$ *- wyznacznik macierzy* $\mathbf{K_o}$ *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K_o}| > 0$

$po^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-3.830	-3.214	0.000	0.000	0.000	0.000	...

$\cdot kN$

Rozwiązanie układu równań: $u := \mathrm{lsolve}(Ko, po)$

u - wektor przemieszczeń węzłowych

$u^T =$

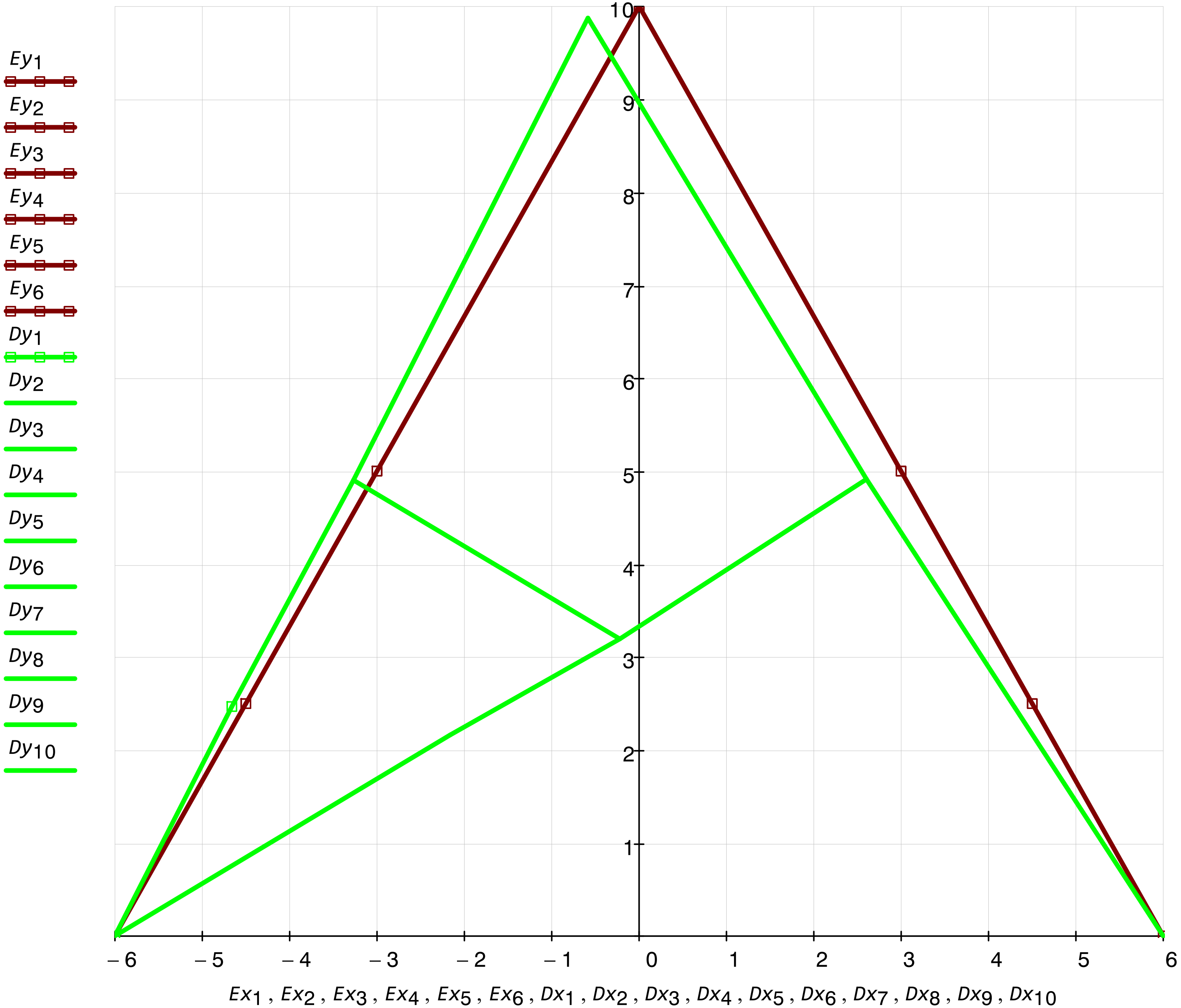
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0.0000	0.0000	-0.1611	-0.0324	-0.1641	-0.0596	-0.2682	-0.0971	-0.5849	-0.1277	-0.3318	-0.1277	...

$\cdot mm$

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

$skala := 1000$

$$Dx_e := Ex_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e - 1)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e - 1)} \end{bmatrix} \qquad Dy_e := Ey_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e)} \end{bmatrix}$$



Ey1
Ey2
Ey3
Ey4
Ey5
Ey6
Dy1
Dy2
Dy3
Dy4
Dy5
Dy6
Dy7
Dy8
Dy9
Dy10
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
– 6
– 5
– 4
– 3
– 2
– 1
0
1
2
3
4
5
6
Ex1 , Ex2 , Ex3 , Ex4 , Ex5 , Ex6 , Dx1 , Dx2 , Dx3 , Dx4 , Dx5 , Dx6 , Dx7 , Dx8 , Dx9 , Dx10

Obliczenie reakcji podpór

$r := K \cdot u - p$

$r^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	6.402	7.299	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	...

$\cdot kN$

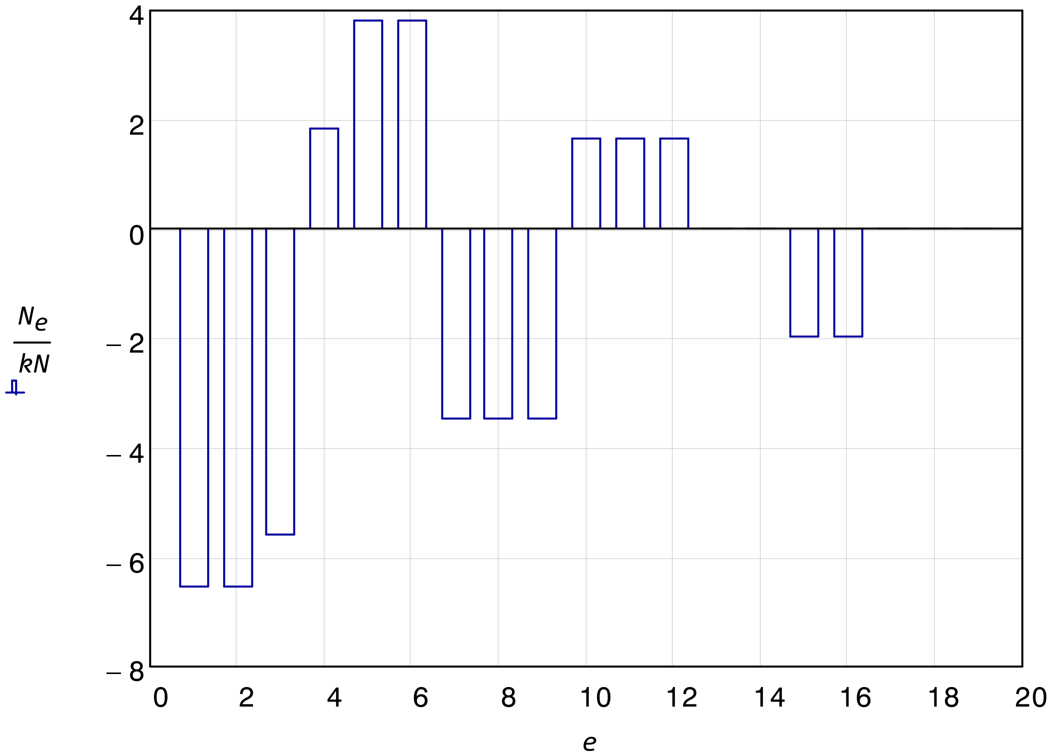
Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}\right) \cdot Ly_e\right]$$

$N =$

	1
1	-6.546
2	-6.546
3	-5.596
4	1.848
5	3.814
6	3.814
7	-3.471
8	-3.471
9	-3.471
10	1.676
11	1.676
12	1.676
13	0
14	0
15	-1.954
16	-1.954
17	0
18	$-2.292 \cdot 10^{-15}$
19	$-1.48 \cdot 10^{-15}$

$\cdot kN$



Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{E}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2\cdot Wk_e - 1} - u_{2\cdot Wp_e - 1}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{2\cdot Wk_e} - u_{2\cdot Wp_e}\right) \cdot Ly_e\right]$$

$\sigma =$

	1
1	-7.892
2	-7.892
3	-6.748
4	2.229
5	4.599
6	4.599
7	-7.837
8	-7.837
9	-7.837
10	3.784
11	3.784
12	3.784
13	0.000
14	0.000
15	-4.411
16	-4.411
17	-0.000
18	-0.000
19	-0.000

$\cdot MPa$