Statyka kratownicy stalowej o 2 różnych przekrojach prętów

$ORIGIN := 1$ *- Ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

$E := 12GPa$ *- Moduł Younga stali*

$a1 := 4cm$ $a2 := 4cm$ $\rho := 700\dfrac{kg}{m^3}$

$h1 := 7cm$ $h2 := 6cm$

$A1 := a1 \cdot h1$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 2...7* $A1 = 28.000 \cdot cm^2$

$A2 := a2 \cdot h2$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 1,8...12* $A2 = 24.000 \cdot cm^2$

Parametry pomocnicze:

$Lss := 2$ *- Liczba stopni swobody węzła*

$Le := 12$ *- Liczba elementów*

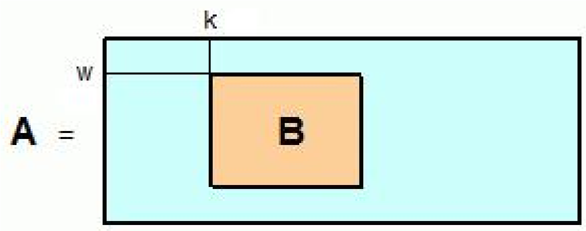
$Lw := 7$ *- Liczba węzłów*

$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań*

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

LBM (A, B, w, k)
ZNACZENIE PARAMETRÓW:
A - nazwa macierzy
B - nazwa bloku
w - numer wiersza, od którego zostanie wprowadzony blok
k - numer kolumny, od której zostanie wprowadzony blok
UWAGA: Macierz B zostanie ulokowana w większej macierzy A, poczynając od elementu usytuowanego w wierszu o numerze "w" i kolumnie o numerze "k".



```
LBM(A, B, w, k) :=  | for  i ∈ 0 .. rows(B) − 1
                    |   for  j ∈ 0 .. cols(B) − 1
                    |     $A_{w+i,k+j} \leftarrow B_{1+i,1+j}$
                    | A
```

Współrzędne węzłów kratownicy

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} m \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ \frac{-8}{10} \\ 4 \\ \frac{-14}{10} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} m$$

Numery węzłów początkowych (Wp)
i końcowych (Wk) elementów

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Przekroje elementów

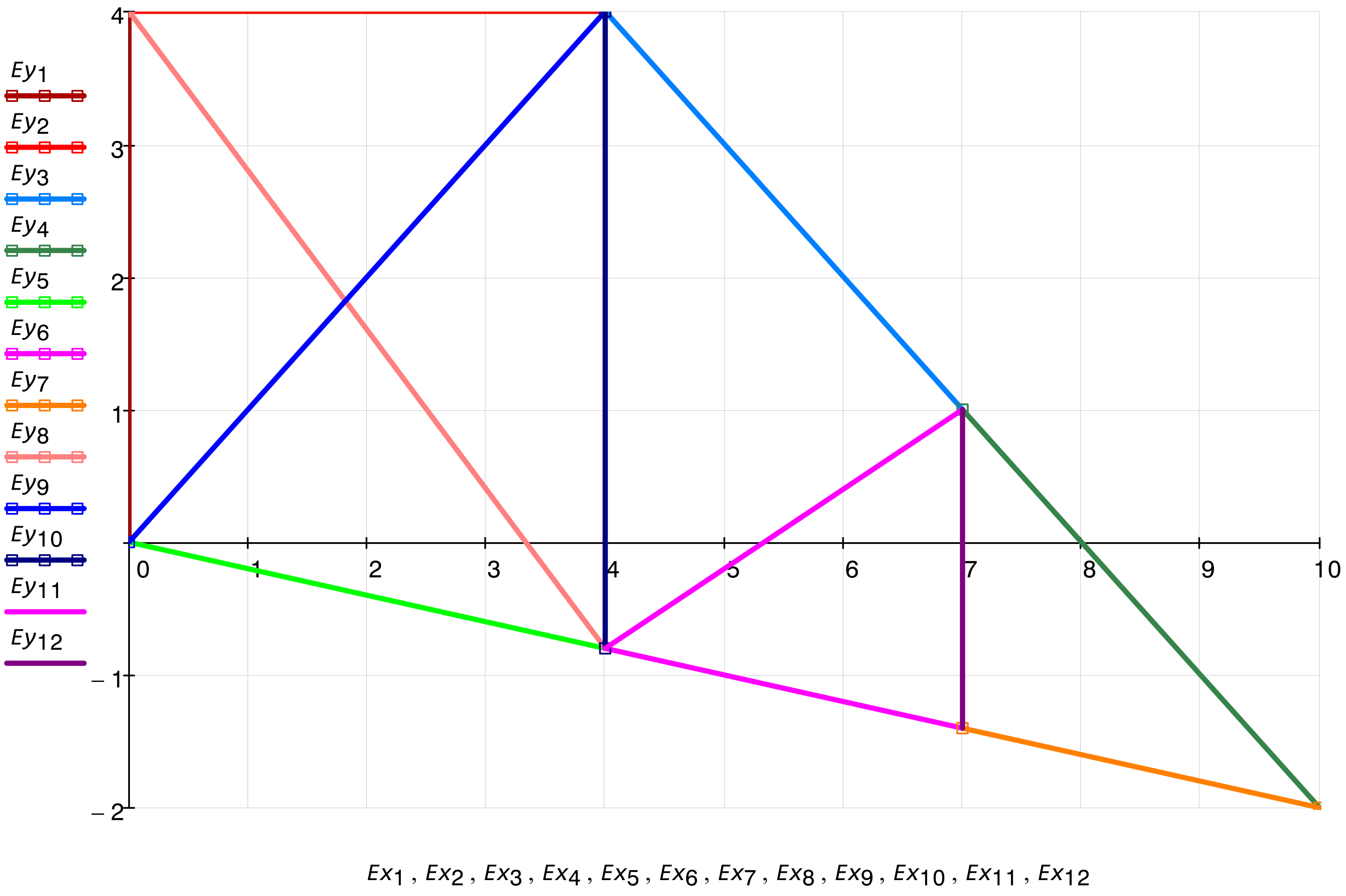
$$A := \begin{pmatrix} A2 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \end{pmatrix}$$

$e := 1 .. Le$ *Pętla po wszystkich elementach kratownicy*

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \qquad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix}$$

Ex, Ey - współrzędne węzłów elementów kratownicy



4
3
2
1
– 1
– 2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Ey_1
Ey_2
Ey_3
Ey_4
Ey_5
Ey_6
Ey_7
Ey_8
Ey_9
Ey_{10}
Ey_{11}
Ey_{12}
$Ex_1, Ex_2, Ex_3, Ex_4, Ex_5, Ex_6, Ex_7, Ex_8, Ex_9, Ex_{10}, Ex_{11}, Ex_{12}$

Macierze sztywności elementów kratownicy

$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)}$

$Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)}$

$L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$

$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^3} \cdot \begin{bmatrix} (Lx_e)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & (Ly_e)^2 \end{bmatrix}$$

$Lx =$

	1
1	0.000
2	4.000
3	3.000
4	3.000
5	4.000
6	3.000
7	3.000
8	4.000
9	4.000
10	0.000
11	3.000
12	0.000

m

$Ly =$

	1
1	4.000
2	0.000
3	-3.000
4	-3.000
5	-0.800
6	-0.600
7	-0.600
8	-4.800
9	4.000
10	4.800
11	1.800
12	2.400

m

$L =$

	1
1	4.000
2	4.000
3	4.243
4	4.243
5	4.079
6	3.059
7	3.059
8	6.248
9	5.657
10	4.800
11	3.499
12	2.400

m

$A =$

	1
1	24.000
2	28.000
3	28.000
4	28.000
5	28.000
6	28.000
7	28.000
8	24.000
9	24.000
10	24.000
11	24.000
12	24.000

$\cdot cm^2$

Objętość (V) i masa (G) kratownicy

$V := \sum_e (A_e \cdot L_e) \quad V = 0.127 \cdot m^3$

$G := \rho \cdot V = 89.153\,kg$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalczych obliczeniach, można pokazać bloki **J** *macierzy sztywności wszystkich elementów*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 7200.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 8400.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 3959.8 & -3959.8 \\ -3959.8 & 3959.8 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 3959.8 & -3959.8 \\ -3959.8 & 3959.8 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_5 = \begin{pmatrix} 7920.1 & -1584.0 \\ -1584.0 & 316.8 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_6 = \begin{pmatrix} 10560.1 & -2112.0 \\ -2112.0 & 422.4 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{pmatrix} 10560.1 & -2112.0 \\ -2112.0 & 422.4 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_8 = \begin{pmatrix} 1889.1 & -2266.9 \\ -2266.9 & 2720.3 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_9 = \begin{pmatrix} 2545.6 & 2545.6 \\ 2545.6 & 2545.6 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_{10} = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 6000.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_{11} = \begin{pmatrix} 6052.9 & 3631.7 \\ 3631.7 & 2179.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_{12} = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 12000.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1$ $\qquad$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ $\qquad$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$K := \sum_{e} \left(LBM\left(Ko, J_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, J_e, k_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, n_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, k_e, n_e\right) \right)$$

$K =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10465.7	961.6	0.0	0.0	-7920.1	1584.0	-2545.6	-2545.6	0.0	0.0
2	961.6	10062.4	0.0	-7200.0	1584.0	-316.8	-2545.6	-2545.6	0.0	0.0
3	0.0	0.0	10289.1	-2266.9	-1889.1	2266.9	-8400.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	-7200.0	-2266.9	9920.3	2266.9	-2720.3	0.0	0.0	0.0	0.0
5	-7920.1	1584.0	-1889.1	2266.9	26422.1	-2331.2	0.0	0.0	-10560.1	2112.0
6	1584.0	-316.8	2266.9	-2720.3	-2331.2	11638.5	0.0	-6000.0	2112.0	-422.4
7	-2545.6	-2545.6	-8400.0	0.0	0.0	0.0	14905.4	-1414.2	0.0	0.0
8	-2545.6	-2545.6	0.0	0.0	0.0	-6000.0	-1414.2	12505.4	0.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	-10560.1	2112.0	0.0	0.0	21120.2	-4224.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	2112.0	-422.4	0.0	0.0	-4224.0	...

$\cdot \frac{kN}{m}$

Globalna macierz sztywności **K** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* |**K**|=0

$$\left| K \cdot \frac{1m}{kN} \right| = -2.614 \times 10^{7}$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Globalny wektor sił węzłowych

$$p := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Fx4 \\ Fy4 \\ 0 \\ 0 \\ -6kN \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$p =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	0.000
5	0.000
6	0.000
7	-2.958
8	-6.344
9	0.000
10	0.000
11	-6.000
12	0.000
13	0.000
14	0.000

$\cdot kN$

Rzutowanie siły w węźle 3 na osie globalnego układu współrzędnych

$$Fx4 := -7kN \cdot \sin(25deg) = -2.958 \cdot kN$$

$$Fy4 := -7kN \cdot \cos(25deg) = -6.344 \cdot kN$$

*Kopiowanie Macierzy **K** i wektora **p** przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$Ko := K$ $\qquad$ $po := p$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$Lwb := 4$ *- liczba warunków brzegowych*

$$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach

$i := 1 .. Lr$ $\qquad$ $j := 1 .. Lwb$

$Ko_{s_j, i} := 0$ *zerowanie wierszy*

$Ko_{i, s_j} := 0$ *zerowanie kolumn - to nie jest konieczne!*

$Ko_{s_j, s_j} := 1 \frac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$po_{(s_j)} := 0$ *zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"*

$Ko =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	10289.1	-2266.9	-1889.1	2266.9	-8400.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	-2266.9	9920.3	2266.9	-2720.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	-1889.1	2266.9	26422.1	-2331.2	0.0	0.0	-10560.1	2112.0	-6052.9	-3631.7
6	0.0	0.0	2266.9	-2720.3	-2331.2	11638.5	0.0	-6000.0	2112.0	-422.4	-3631.7	-2179.0
7	0.0	0.0	-8400.0	0.0	0.0	0.0	14905.4	-1414.2	0.0	0.0	-3959.8	3959.8
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-6000.0	-1414.2	12505.4	0.0	0.0	3959.8	-3959.8
9	0.0	0.0	0.0	0.0	-10560.1	2112.0	0.0	0.0	21120.2	-4224.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	2112.0	-422.4	0.0	0.0	-4224.0	12844.8	0.0	-12000.0
11	0.0	0.0	0.0	0.0	-6052.9	-3631.7	-3959.8	3959.8	0.0	0.0	13972.5	-4287.9
12	0.0	0.0	0.0	0.0	-3631.7	-2179.0	3959.8	-3959.8	0.0	-12000.0	-4287.9	22098.6
13	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
14	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	...

$\cdot \frac{kN}{m}$

$\left| Ko \cdot 1\frac{m}{kN} \right| = 8.418 \times 10^{39}$ *- wyznacznik macierzy* $\mathbf{K}_o$ *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}_o| > 0$

Rozwiązanie układu równań: $u := \mathrm{lsolve}(Ko, po)$

u - wektor przemieszczeń węzłowych

$u^T =$

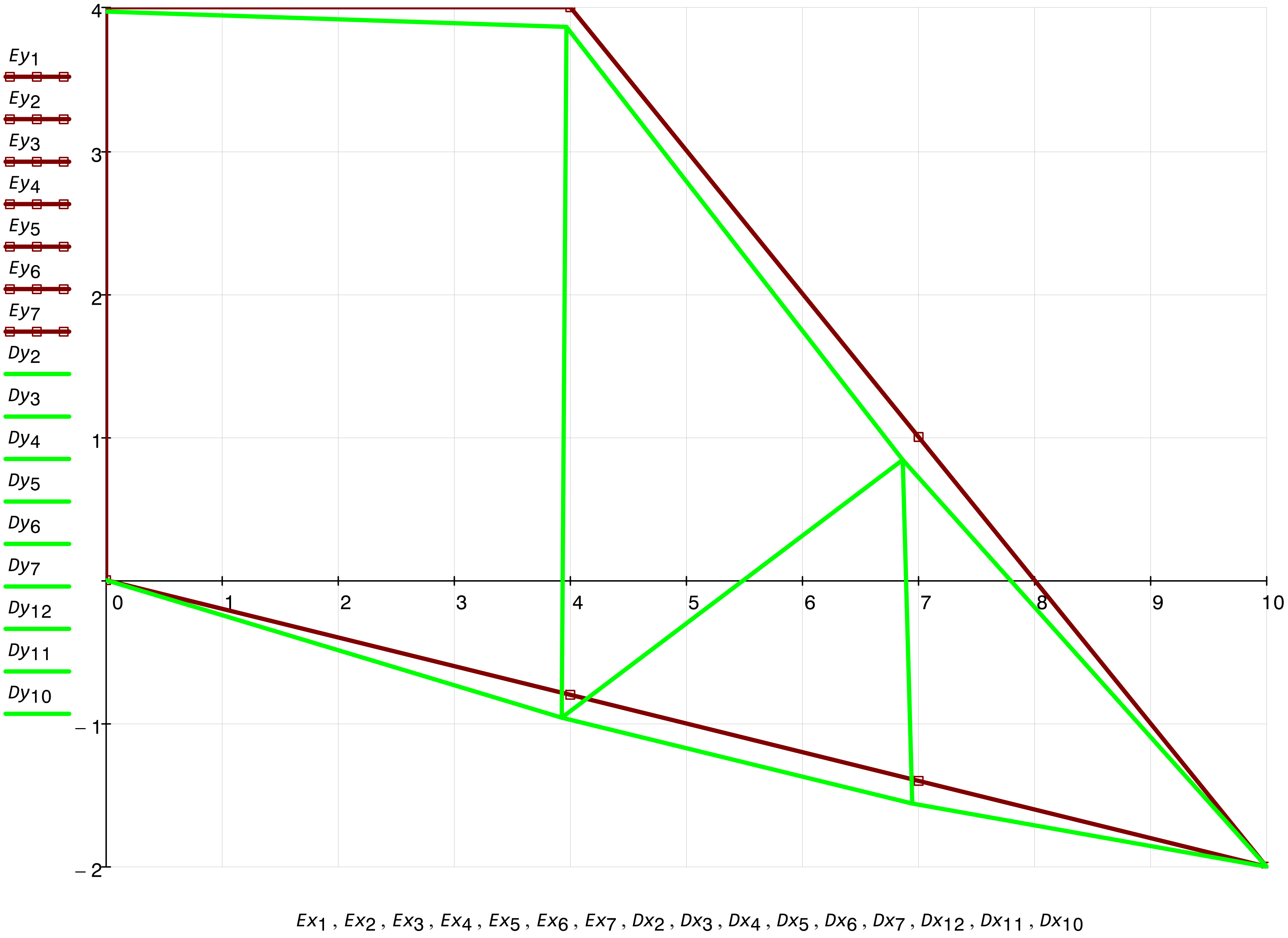
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.0000	0.0000	-0.1263	-0.2957	-0.7357	-1.5863	-0.3375	-1.3820	-0.5274	-1.5907	-1.3526	...

$\cdot mm$

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

$skala := 100$

$$Dx_e := Ex_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e - 1)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e - 1)} \end{bmatrix} \qquad Dy_e := Ey_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e)} \end{bmatrix}$$


4
3
2
1
– 1
– 2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Ey_1
Ey_2
Ey_3
Ey_4
Ey_5
Ey_6
Ey_7
Dy_2
Dy_3
Dy_4
Dy_5
Dy_6
Dy_7
Dy_{12}
Dy_{11}
Dy_{10}
$Ex_1, Ex_2, Ex_3, Ex_4, Ex_5, Ex_6, Ex_7, Dx_2, Dx_3, Dx_4, Dx_5, Dx_6, Dx_7, Dx_{12}, Dx_{11}, Dx_{10}$

Obliczenie reakcji podpór

$r := K \cdot u - p$

$r^T =$ (· kN)

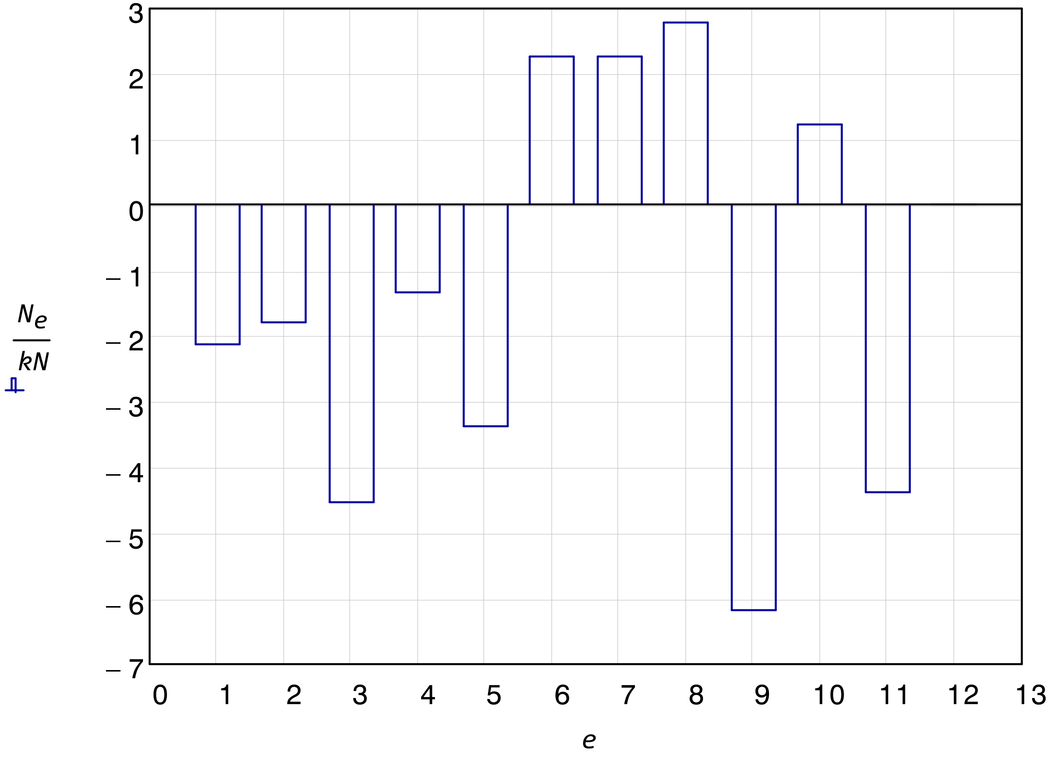
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	7.692	5.843	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	1.267	0.501

Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}\right) \cdot Ly_e\right]$$

$N =$ (· kN)

	1
1	-2.129
2	-1.774
3	-4.515
4	-1.333
5	-3.38
6	2.253
7	2.253
8	2.771
9	-6.19
10	1.226
11	-4.373
12	0



Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{E}{\left(L_e\right)^2}\cdot\left[\left(u_{2\cdot Wk_e-1}-u_{2\cdot Wp_e-1}\right)\cdot Lx_e+\left(u_{2\cdot Wk_e}-u_{2\cdot Wp_e}\right)\cdot Ly_e\right]$$

$\sigma =$

	1
1	-0.887
2	-0.634
3	-1.613
4	-0.476
5	-1.207
6	0.805
7	0.805
8	1.155
9	-2.579
10	0.511
11	-1.822
12	0.000

$\cdot MPa$